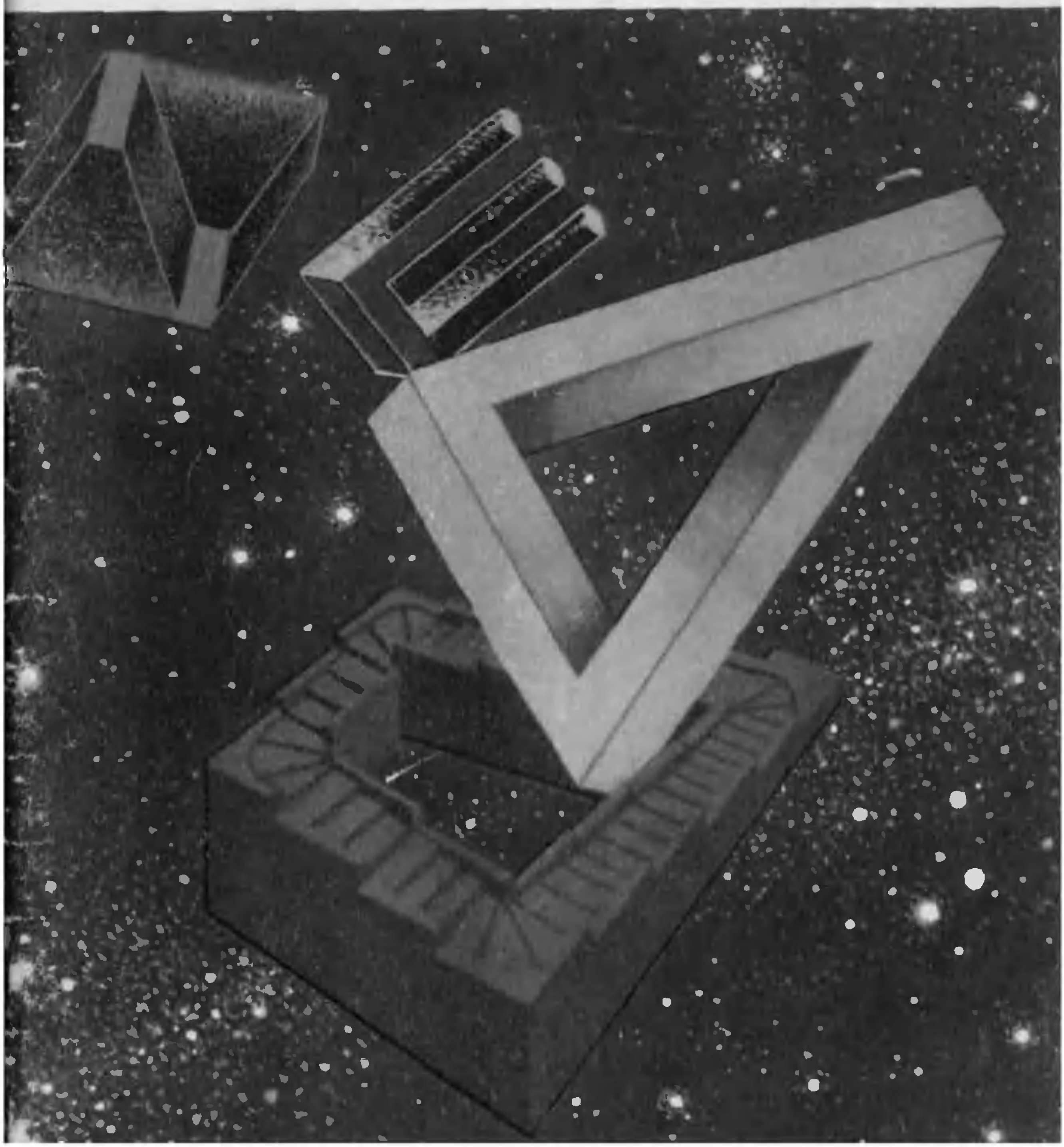
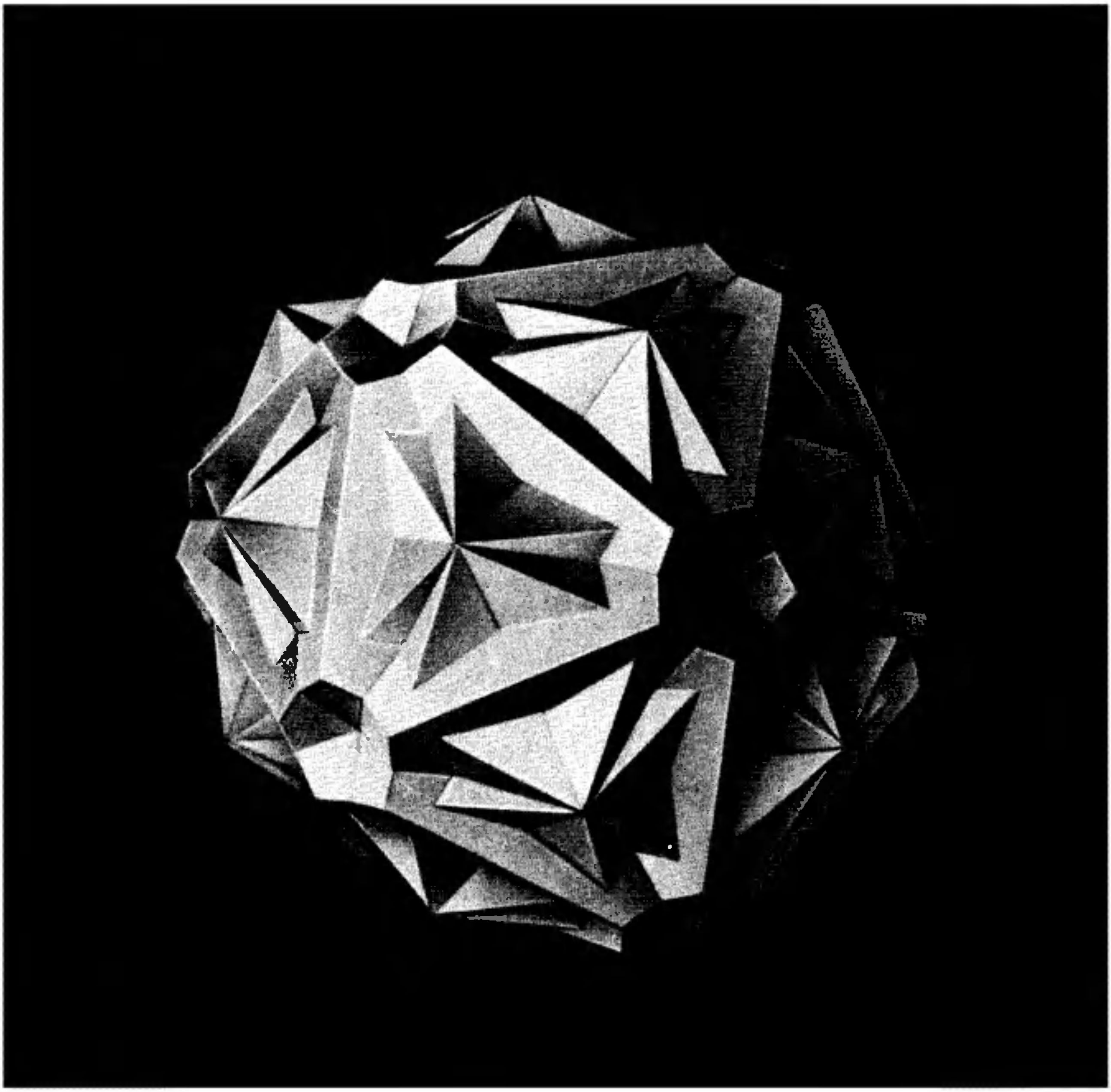
ISSN 0130-2221

Квант

2
1979

НАУЧНО—ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО—МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке показан замысловатый, но красивый многогранник — объединение пяти додекаэдров, расположенных, в некотором смысле, «максимально симметрично». Вершины этих 5 додекаэдров (их 5×20=100) распадаются на два типа — одиночные (их 60, в них сходятся по три ребра нашего многогранника, а сами вершины группируются в виде 12 маленьких пятиугольников) и сдвоенные (их 20=40 : 2, в каждой из них сходится 12 ребер). Попробуйте найти пять вершин одной грани одного додекаэдра (две сдвоенные, три одиночные). Найдите на рисунке остальные видимые грани этого додекаэдра; найдите грань какого-либо другого додекаэдра. Убедитесь, что любые два додекаэдра имеют ровно две общие вершины и получаются друг из друга поворотом вокруг оси, соединяющей эти вершины. Модель сконструирована В. Гамаюновым.

Основан в 1970 году

Квант

2
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Рисунок Ф. Инфантэ на первой странице обложки изображает невозможные объекты. О них вы можете прочитать на с. 8.

Школа творчества

Научные общества учащихся... Эти творческие объединения в последние годы пользуются все большей популярностью у школьников, авторитетом и поддержкой у ученых. Именно эта форма работы способствует решению задачи, определенной XXV съездом КПСС, постановлением ЦК КПСС и Совета Министров «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду», — развивать творческие способности ребят, прививать умение самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной информации. ЦК ВЛКСМ совместно с заинтересованными организациями всячески поддерживает подобные объединения, пропагандирует и распространяет опыт работы лучших. Добиваясь эффективности в этой работе, ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения СССР, ВС НТО, Правление Всесоюзного общества «Знание» в марте 1977 года утвердили Примерное положение о городском, районном научном обществе учащихся (НОУ). В материалах XVIII съезда ВЛКСМ еще раз было подчеркнуто, что комитетам комсомола вместе с соответствующими организациями и учреждениями необходимо «создавать технические кружки и клубы, научные общества учащихся, юношеские очно-заочные школы при вузах и научно-исследовательских институтах».

С целью дальнейшего расширения сети НОУ и совершенствования их работы ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения РСФСР, ВС НТО приняли решение провести в 1979 году Всероссийский слет актива научных обществ учащихся. Идя навстречу слету, мы можем сказать, что сегодня научные общества учащихся завоевали прочное место в системе внеклассной и внешкольной работы со старшеклассниками. Значительно выросло количество районных, городских, областных НОУ. В 1968 году их было только 16, в 1976 — 98, а в 1978 — 264. Усилилось внимание к НОУ со стороны ученых, специалистов, студентов. Определенный опыт работы накоплен на Украине, в Белоруссии, Молдавии, Карельской АССР, Волгоградской, Свердловской, Челябинской областях, г. Москве.

Имеющийся опыт позволяет говорить об определенной **системе деятельности научных обществ учащихся.**

Научное общество учащихся (НОУ) строится как массовое добровольное объединение школьников, которые стремятся совершенствовать свои знания в определенной отрасли науки, техники, расширять свой научный кругозор, приобретать умения и навыки творческой научно-исследовательской деятельности под руководством ученых и специалистов. Членами НОУ, как правило, являются учащиеся 7—10 классов общеобразовательных школ.

Общества создаются при учебных заведениях, внешкольных учреждениях, научно-исследовательских и проектных организациях, на предприятиях промышленности и сельского хозяйства. Каждое из них может иметь свое название, эмблему, девиз, традиции. Основой общества являются первичные объединения учащихся (кружки, клубы, школы, секции и т. д.), высшим органом — сессия всех членов общества. Для решения организационных вопросов деятельности общества избирается ученический Совет. Из научных консультантов создается Совет кураторов, который организует и координирует научно-методическую работу.

В содержание деятельности НОУ входит: теоретическая подготовка; исследовательская, экспериментальная работа; применение полученных знаний, навыков в практической работе по оказанию помощи школе, народному хозяйству; пропаганда научно-технических знаний среди учащихся, проведение массовых мероприятий.

Занятия членов НОУ проводятся коллективно или индивидуально на основе утвержденных Советом кураторов программ и тематики творческих работ учащихся. Итоговое занятие проводится в форме конференции, сессии. В период зимних и летних каникул для членов общества организуются учебно-инструктивные сборы и профильные лагеря.

Непременным условием жизненности обществ является их тесная связь с производством, вузами, научными учреждениями, правлениями и советами ВОИР, НТО, обществом «Знание». Очень важно и ценно, что деятельность большинства НОУ носит общественно полезную направленность.

Несколько лет назад в г. Свердловске было создано научное общество учащихся, которое сегодня переросло в областное НОУ или, как называют его ребята, «Малую академию наук». Здесь на 11 отделениях — физическом, химическом, математическом, общественных наук и других — занимается около 40 тысяч школьников области. Руководят их работой 3 тысячи молодых ученых Уральского научного центра, студентов и преподавателей вузов, учителей школ, специалистов ряда промышленных предприятий, колхозов и совхозов. Много сил и энергии отдают работе со школьниками зав. лабораторией института «УралпромстройНИИпроект», председатель Совета кураторов общества доктор технических наук С. А. Тимашев, молодые ученые, сотрудники институтов Уральского научного центра АН СССР И. В. Кочергина, Ю. В. Болтычев, М. И. Гусев. Четкая структура, интересные традиции, постоянное внимание заинтересованных организаций, творческая, эмоциональная атмосфера позволили добиться высокого уровня деятельности общества.

Интересно строит свою работу юношеское научное общество Московского городского Дворца пионеров и школьников. Постоянно в нем занимается около 500 учащихся. Работу возглавляет Совет общества, состоящий из школьников, направляет — Совет кураторов-ученых. В течение учебного года проводятся общие собрания, конференции. В обществе три секции: общественных, естественных и технических наук. Эти секции ведут работу по 25 направлениям. Общество имеет тесные постоянные связи более чем с 120 вузами, НИИ и организациями города. Со многими из них заключены договоры и составлены планы совместной работы. Выполнение заданий ученых и специалистов — один из ведущих принципов в организации деятельности общества. В настоящее время ведется работа по 47 таким заданиям. Так, в секции естественных наук работа осуществляется по комплексной программе изучения солнечно-земных связей «ГЕОС». Программа объединяет различные методы исследования различными кружками общества. Кружки радиофизики, математики и программирования, астрофизики, космологии, электронной автоматики выполняют работу по темам: «Исследование серебристых облаков», «Искусственный интеллект в космосе», «Исследование солнечно-земных связей» и т. п., конструируют и изготавливают различные приборы, составляют программы для ЭВМ. По итогам работы ребята пишут рефераты, выступают с докладами в школах, ЖЭКах, на конференциях секций общества. Ежегодно готовится около 600 рефератов, 100 докладов. Ряд результатов исследований членов общества используется в народном хозяйстве, при проведении экспериментальных работ в вузах и научных учреждениях.

В Узбекистане хорошо известно научное общество учащихся средней школы № 110 г. Ташкента. Цели и задачи общества определены специальным постановлением педагогического совета и комитета комсомола школы. Научно-педагогическое руководство осуществляется совместно учителями школы и учеными Академии наук Узбекистана, преподавателями и студентами ряда ташкентских вузов. Между школой и шефами заключены долгосрочные договоры содружества. Ежегодно в сентябре и мае проходят конференции, на которых утверждаются планы и программы, рассматриваются отчеты, вручаются памятные удостоверения «Лучший математик школы», «Лучший физик школы», премии шефствующих организаций. Между конференциями руководство работой общества осуществляет детский Совет. Общество объединяет секции математики, физики, химии, истории, литературы, права. Секции состоят из клубов для учащихся 6—7 классов, проблемных групп для старшеклассников.

Например, в секцию математики входят клубы «Считай, смекай, отгадывай» (для учащихся 6-х классов), «Занимательная математика» (для семиклассников и восьмиклассников), постоянно действующий семинар «Поиски и решения, исследования и выводы» и практикум будущего исследователя (для учащихся 8—10 классов). Каждая секция и все проблемные группы имеют научных консультантов. Члены общества изучают теоретические вопросы, проводят экспериментальную работу в лабораториях вузов и НИИ, учебных кабинетах школы, изготавливают различные пособия, оборудование, приборы для школы и народного хозяйства.

Кроме комплексных НОУ в ряде республик, краев успешно действуют профильные объединения учащихся, такие как «Малая лесная академия наук» в Карелии, научно-технические и сельскохозяйственные общества в Краснодарском крае, общество юных астрономов в Азербайджане, юных химиков и механиков в Казани, Ростовское областное общество юных краеведов.

Более десяти лет работает в средней школе № 5 г. Углича Ярославской области кружок юных астрономов. Здесь тесно сочетаются теоретическая, экспериментальная и практическая работа. Основными направлениями деятельности являются: исследовательская работа по изучению солнца и метеоров; приборостроение для нужд кружка и школы; проведение массовых мероприятий, направленных на пропаганду астрономических и атеистических знаний среди учащихся, родителей и населения. Ребята собственными руками построили и оборудовали школьную обсерваторию, кино- и фотолабораторию, сконструировали и изготовили необходимую радиоаппаратуру.

В исследовательской работе основное внимание уделяется изучению солнечной активности и ее связи с явлениями на Земле. Юные астрономы на занятиях изучают теоретические аспекты проблемы, ведут наблюдения за динамикой солнечных пятен, их фото- и киносъемку, регистрируют все метеорологические изменения, происходящие на Земле. Они разработали метод определения глубины солнечных пятен, накопили огромный наблюдательный материал, собрали специальную литературу по данному вопросу. Ребята организуют празднование Дня космонавтики, проводят экскурсии, беседы в обсерватории, атеистические вечера, викторины, читают лекции для учащихся школы. Кружок школы — постоянный участник Всесоюзных слетов юных астрономов, он награжден бронзовой медалью и дипломом ВДНХ.

Все большее распространение получают **юношеские школы по предметам** естественных и гуманитарных наук. Это добровольные, массовые объединения учащихся 8—10-х классов общеобразовательных школ, создаваемые при высших учебных заведениях и научных учреждениях с целью углубления знаний, удовлетворения и развития интересов школьников к определенной отрасли науки, расширения научного кругозора и профессиональной ориентации. Преподавание осуществляется учеными, научными сотрудниками, преподавателями, аспирантами и студентами на общественных началах. Очень популярны среди школьников очные, заочные, вечерние, летние школы юных математиков, физиков, химиков, историков, педагогов, медиков. Интересный опыт этой работы накоплен в Белоруссии, Татарской АССР, Горьковской области, Хабаровском крае, г. Москве.

Анализ деятельности научных обществ учащихся всех видов показывает, что они активно способствуют повышению качества знаний школьников, расширению их научного и технического кругозора, овладению навыками самостоятельной творческой работы, воспитанию готовности к сознательному выбору будущей профессии и творческому труду.

Но пока, к сожалению, научные общества не созданы повсеместно. Нет республиканских, областных, городских НОУ в ряде союзных республик, некоторых областных центрах РСФСР, хотя здесь есть все возможности для их работы. Недостаточно еще привлечены к этой работе молодые ученые и специалисты научно-исследовательских институтов. Нас тревожит, что в ряде объединений всю деятельность ребят сводят к подготовке их к поступлению в вуз. Не ведется пока целенаправленная разработка программ для НОУ. Часто учителя занимают пассивную позицию по отношению к НОУ, не используют его как хорошего помощника в работе по повышению качества знаний учащихся, пропаганде достижений науки и техники.

Повышению эффективности деятельности НОУ способствовала бы регулярная публикация на страницах соответствующих журналов, таких как «Квант», списков тем работ, заданий ученых и специалистов, учреждений и организаций юным исследователям.

Задача и долг прежде всего молодых ученых, учителей, студентов — превратить каждое научное общество учащихся в настоящую школу творчества, воспитания будущих творцов советской науки и техники.

Ю. Иванов,
Ответственный организатор
Отдела школьной молодежи ЦК ВЛКСМ

Г. Коткин

Почему плохо кричать против ветра?

Почему мы плохо слышим звук, если ветер дует от нас к его источнику? На первый взгляд, это ясно. Против ветра ближе падает брошенный камень, медленнее летит птица... *Попробуем, однако, провести количественную оценку.*

Пусть скорость звука относительно воздуха равна $\vec{c}$, а скорость ветра $\vec{u}$. Тогда скорость звукового сигнала относительно земли равна $|\vec{c}|-|\vec{u}|$ и время его распространения на расстояние l равно $t=\frac{l}{|\vec{c}|-|\vec{u}|}$. За это время сигнал проходит относительно воздуха расстояние

$$l'=|\vec{c}|\,t=\frac{l\,|\vec{c}|}{|\vec{c}|-|\vec{u}|}.$$

Именно величина l' определяет ослабление звука: находясь на расстоянии l от источника звука (против ветра), мы слышим звук таким же, как если бы ветра не было, а мы находились на расстоянии l'.

Примем $|\vec{u}|=15$ м/с (довольно сильный ветер), $|\vec{c}|=330$ м/с, $l=50$ м. Тогда $l'\approx 52$ м. Ветер «отодвигает» нас примерно на 2 м. Этого мы, пожалуй, и не заметили бы. В *действительности, влияние ветра* гораздо сильнее. Следовательно, надо искать другое объяснение.

Обратим внимание на тот факт, что скорость ветра не одинакова на разных высотах — она растет с увеличением высоты над уровнем земли. Казалось бы, это никак не должно повлиять на распространение звука, когда источник и приемник расположены на одной высоте. Если же приемник (или источник) звука опустится, часть пути звуковой сигнал будет проходить в слоях воздуха, движущихся с меньшей скоростью, и придет менее ослабленным. На самом же деле, если слушающий (или кричащий) человек присядет, слышимость только ухудшится. И все-таки дело именно в зависимости скорости ветра от высоты.

Чтобы легче было разобраться в картине распространения звука, рассмотрим сначала такой пример. Представим себе моторную лодку *Л*, идущую со скоростью $\vec{c}$ относительно воды под углом к течению (рис. 1). Пусть сидящий в ней человек (будем называть его капитаном) «целит» на видимую где-то вдали заводскую трубу *T*. Если бы течения не было, лод-

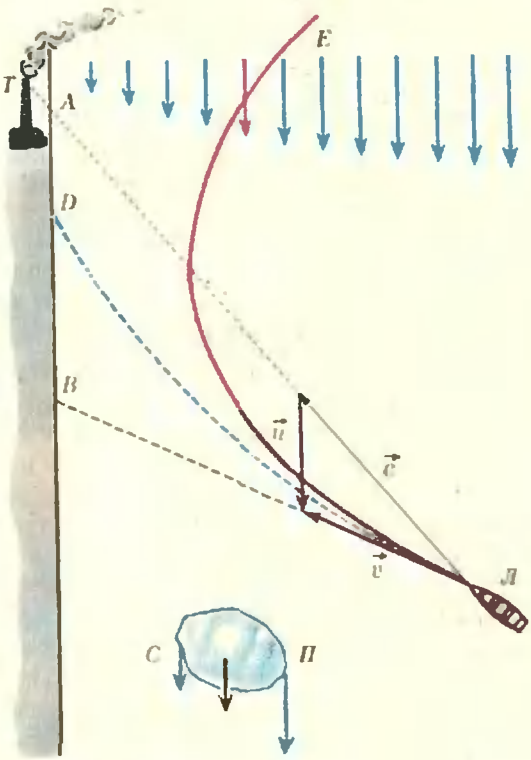


Рис. 1.

ка пристала бы к берегу в точке A. В действительности, скорость лодки относительно берега $\vec{v} = \vec{c} + \vec{u}$. Если бы скорость течения $\vec{u}$ была неизменной вплоть до берега, лодка пристала бы в точке B. Но скорость течения убывает по мере приближения к берегу, поэтому изменяются величина и направление скорости лодки $\vec{v}$, так что она движется по кривой $ЛD$.

Предположим, что капитан ненадолго задремал, но продолжает удерживать руль в прежнем положении. Пока он спит, посмотрим на плывущую по течению льдину $СП$. Эта льдина плывет вращаясь: ее приводит во вращение вода, которая у одного края льдины ($С$) от нее отстает, а у другого края ($П$) — обгоняет ее. То же самое произойдет и с лодкой. Она будет поворачиваться, при этом будет изменяться направление скорости $\vec{c}$ (несмотря на неподвижно удерживаемый руль). Проснувшись, капитан увидит, что лодка, описавшая дугу $ЛЕ$, удаляется от берега.

Теперь нам нетрудно изобразить и картину распространения звуковых сигналов. Их траектории («лучи») искривляются, подобно траектории лодки со спящим капитаном (рис. 2; ветер дует справа налево). При этом область MLN оказывается «мертвой зоной»: в нее не заходят «лучи» звука. Человек в этой области почти не слышит звука от источника S. (Некоторая слышимость в «мертвой зоне» связана с рассеянием звука при отражении от поверхности земли, а также с дифракцией звука.)

Вспомним, однако, что мы обнаружили несостоятельность первого объяснения явления **при попытке количественной оценки**. Попробуем провести количественную оценку и для второго объяснения. Оценим расстояние до «мертвой зоны». Рассмотрим «луч» SLM (см. рис. 2), будем считать его направление близким к горизонтальному. Выделим малый участок AB волновой поверхности, будем считать его плоским и расположенным вертикально (рис. 3). Через время Δt этот участок

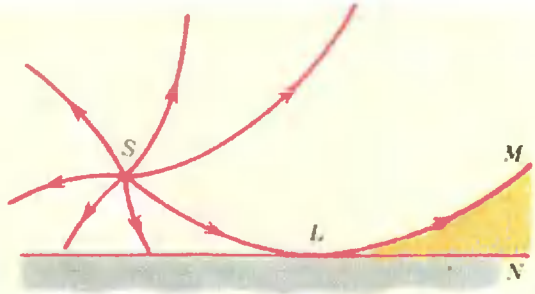


Рис. 2.

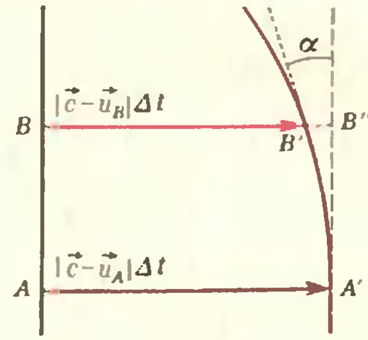


Рис. 3.

займет положение $A'B'$, причем

$$|AA'| = (|\vec{c}| - |\vec{u}_A|)\Delta t,$$
$$|BB'| = (|\vec{c}| - |\vec{u}_B|)\Delta t$$

($\vec{u}_A$ и $\vec{u}_B$ — скорости ветра на высоте точек A и B). При этом рассматриваемый участок повернется на малый угол α:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \frac{|B'B''|}{|A'B''|} =$$
$$= \frac{(|\vec{c}| - |\vec{u}_A|) - (|\vec{c}| - |\vec{u}_B|)}{\Delta h} = \frac{|\Delta\vec{u}|\,\Delta t}{\Delta h},$$

где $|A'B''| = |AB| = \Delta h$ и $\Delta\vec{u} = \vec{u}_B - \vec{u}_A$.

Таким образом, участок волновой поверхности поворачивается с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t} \approx \frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta h}.$$

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости $\vec{c}$ — скорости звука относительно воздуха.

Будем считать, что величина ω постоянна вдоль всего «луча», тогда рассматриваемый участок SLM (см. рис. 2) можно считать дугой окружности. Скорость звукового сигнала

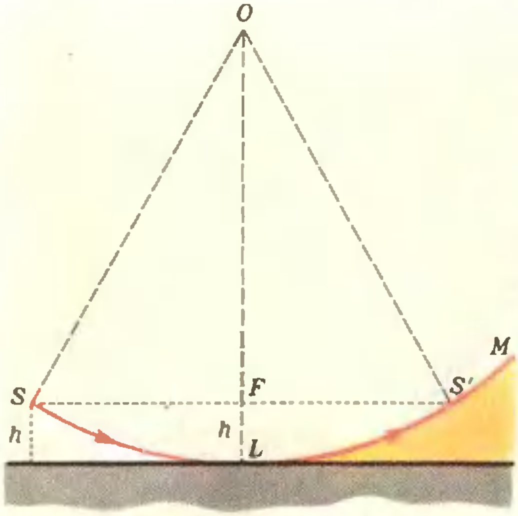


Рис. 4.

относительно земли $|\vec v| = |\vec c| - |\vec u| \approx$ $\approx |\vec c|$ можно связать с радиусом r этой окружности: $|\vec v| = \omega r$. Отсюда (рис. 4)

$$|SO| = |OL| = r = \frac{|\vec v|}{\omega} \approx \frac{|\vec c|\,\Delta h}{|\Delta \vec u|}.$$

Из треугольника OSF

$$|SF| = \sqrt{|OS|^2 - |OF|^2} = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} \approx \sqrt{2rh} \approx \sqrt{2|\vec c|\,h\frac{\Delta h}{|\Delta \vec u|}}.$$

Итак, слушатель, находящийся на той же высоте h, что и источник звука, попадает в «мертвую зону» на расстоянии

$$|SS'| = 2|SF| \approx 2\sqrt{2|\vec c|\,h\frac{\Delta h}{|\Delta \vec u|}}.$$

Примем $\frac{|\Delta \vec u|}{\Delta h} \approx \frac{|\vec u|}{h}$. Тогда окончательно

$$|SS'| \approx 2h\sqrt{\frac{2|\vec c|}{|\vec u|}} \approx 3h\sqrt{\frac{|\vec c|}{|\vec u|}}.$$

Для $h = 1{,}5$ м, $|\vec c| = 330$ м/с и $|\vec u| = 15$ м/с получаем

$$|SS'| \approx 20 \text{ м}$$

— вполне разумный результат. Точный расчет формы «звуковых лучей» приводит примерно к такому же результату.

Разумеется, есть еще много причин, ухудшающих слышимость при ветре, но приведенный расчет дает уверенность, что главную причину мы указали правильно.

Упражнения

1. В летний полдень жук решил полететь на Солнце и полетел со скоростью $|\vec c| = 2$ м/с. Однако он не учел, что дует слабый ветерок (ветер южный, скорость его $|\vec u| = 1$ м/с). На какой угол отклонится жук от цели своего полета (с точки зрения сидящего на ветке воробья)? Дело происходит в Новосибирске; высоту Солнца над горизонтом в полдень можно принять равной $\alpha = 60°$.

2. Найти траекторию жука, летящего к Солнцу со скоростью $\vec c$ (см. предыдущую задачу), если скорость ветра $\vec u$ растет с высотой h по линейному закону: $|\vec u| = bh$ (b = const).

3. Плоскость AB разделяет области

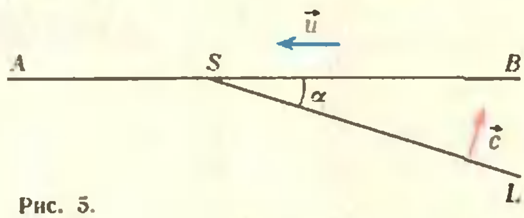


Рис. 5.

неподвижного воздуха и воздуха, движущегося со скоростью $\vec u$ (рис. 5). На границу падает звуковая волна, фронт которой SL составляет с AB угол α. Скорость падающей волны равна $\vec c$. Под каким углом к плоскости AB расположен фронт преломленной волны, прошедшей в область движущегося воздуха?

Примечание

Эта задача аналогична задаче Ф509, решение которой вы можете найти в первом номере журнала за этот год.

Невозможные объекты

На I странице обложки по звездному небу летят «невозможные объекты»: красная лестница все время опускается довольно круто вниз, но, обойдя по ней полный виток, вы окажетесь... в исходном месте; три параллельные цилиндрические ножки фиолетовой детали умудряются примыкать к соединительной перекладине... в двух местах; с синим и оранжевым объектами тоже что-то неладно — их длительное разглядывание вызывает неприятное ощущение внутреннего противоречия.

Попытайтесь понять, в чем секрет «эффекта невозможности» в каждом случае. Впрочем, все ли эти объекты невозможны? Нельзя ли так «увидеть» некоторые из них, чтобы противоречия не было?

Оказывается, по оранжевому треугольнику (это — так называемый *треугольник Л. и Р. Пенроузов*) можно сконструировать реальный объект, который в некоторых ракурсах будет выглядеть именно как треугольник Пенроузов. Об этом в «Кванте» уже писалось (1971, № 5, с. 26—29). Здесь же мы помещаем два новых конструктивных решения этого треугольника, присланных в редакцию вместе с фотографиями архитектором В. Колейчуком.

Посмотрите на первые две фотографии (рис. 1, 2). На них о д и н и т о т ж е предмет, состоящий из «скрученных» деревянных брусков, склеенных «треугольником», снят из разных точек. Фотограф нашел такую точку (рис. 1), из которой все три бруска кажутся прямыми.

Рис. 1.

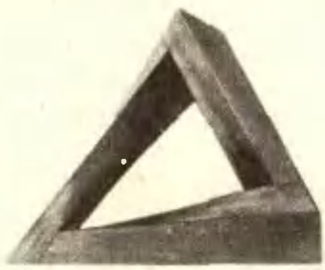


Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Еще интереснее следующие фотографии (рис. 3, 4). Трудно поверить, что на них сфотографирован один и тот же предмет.

Принцип построения этого предмета совсем прост. Нарисуем на плоскости π

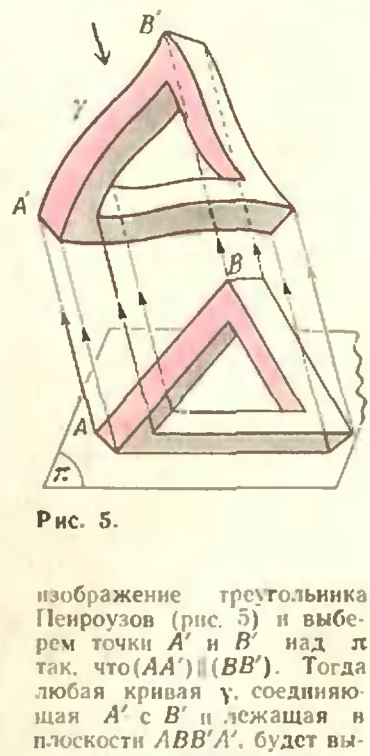


Рис. 5.

изображение треугольника Пенроузов (рис. 5) и выберем точки A' и B' над π так, что $(AA') \parallel (BB')$. Тогда любая кривая γ, соединяющая A' с B' и лежащая в плоскости $ABB'A'$, будет выглядеть как отрезок, если на нее смотреть, поместив глаз в плоскость $ABB'A'$ или в точку, расположенную «очень далеко» над плоскостью π по направлению луча $[AA')$. Поступив аналогично с другими отрезками, можно построить пространственный предмет, изображенным на рисунке 3.

Ясно, что глаз (или фотоаппарат), помещенный достаточно далеко по направлению $[AA')$, увидит этот предмет таким, как он изображен на плоскости π.

О. Михайлов

Одиннадцать правильных паркетов

В повседневной жизни мы нередко встречаемся с покрытиями плоскости многоугольниками: полы в жилых домах застилают паркетами, стены ванных комнат покрывают кафельными плитками, современные здания украшают орнаментами. О наиболее симметричных покрытиях — математики называют их правильными паркетами — в «Кванте» уже писалось: в статье А. Колмогорова («Квант», 1970, № 3) обсуждалась задача классификации правильных паркетов. В настоящей заметке приводится одно из возможных ее решений.

Паркетом мы будем называть покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо совсем не имеют общих точек. Паркет называется *правильным*, если его можно наложить на себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую наперед заданную вершину.

Сколько всего правильных паркетов? Как они устроены? Наша задача — ответить на эти вопросы.

Легко видеть, что вообще паркетов — не обязательно правильных — существует бесчисленное множество *) (покажите это самостоятельно). Однако, подобно тому как при бесчисленном множестве многогранников вообще существует лишь конечное число правильных многогранников, так и при бесчисленном множестве паркетов существует лишь конечное число п р а в и л ь н ы х паркетов.

*) Два паркета мы считаем р а з л и ч н ы м и, если не существует гомотетии плоскости, переводящей один из этих паркетов в другой.

Иногда в этой статье мы будем для краткости правильные паркеты называть просто паркетами.

Решение нашей задачи естественно начать с исследования вершин паркета. Из определения правильности сразу вытекает п р и н ц и п э к в и в а л е н т н о с т и в е р ш и н: *любые две вершины устроены одинаково* в том смысле, что з в е з д ы всех вершин одинаковы. (*Звездой вершины* называется фигура, образованная всеми многоугольниками, содержащими ее.)

Обозначим через m_i число прилегающих к вершине i-угольников, а через α_i — величину внутреннего угла правильного i-угольника. Тогда в каждой вершине, очевидно, выполняется соотношение

$$\sum m_i\alpha_i = 360^\circ = 4d,$$

где в сумму мы включаем все слагаемые с номерами i, для которых к вершине примыкает хотя бы один i-угольник *).

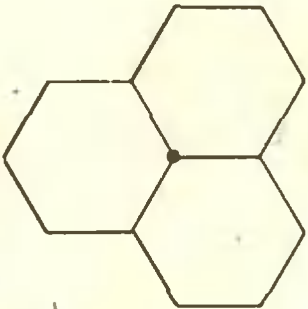
Подставляя в эту формулу известное из геометрии выражение для α_i, $\alpha_i = 2(1-2/i)d$, и сокращая на $2d$, получим

$$\sum m_i\left(1-\frac{2}{i}\right) = 2. \qquad (1)$$

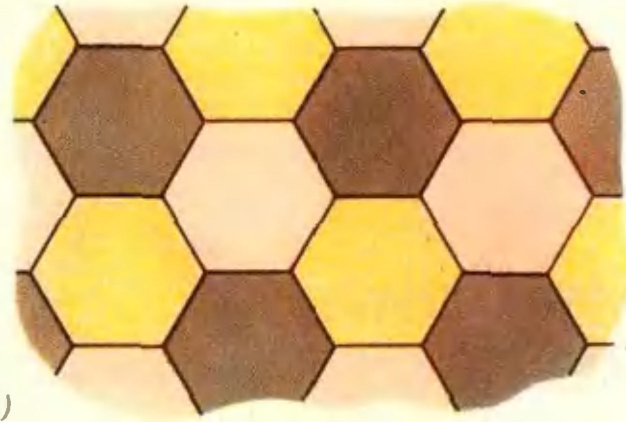
Таким образом, *числа m_i являются целочисленными решениями уравнения* (1). Однако, как мы увидим ниже, не все целочисленные решения уравнения (1) реализуются правильными паркетами!

Далее, *в вершине паркета может сходиться не более шести и не менее трех многоугольников.* Действительно, при схождении в одной вершине семи или более многоугольников хотя бы один угол в правильном многоугольнике должен быть менее 60°, что невозможно (минимальный угол — у треугольника — равен 60°).

*) Впрочем, $m_i = 0$ для остальных i, поэтому формально можно считать, что мы суммируем по всем i.

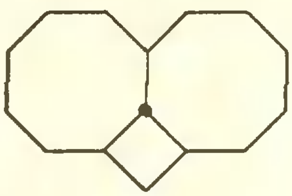


а)

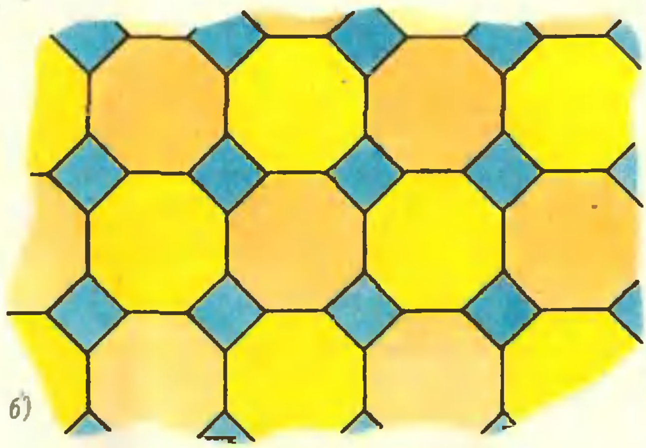


б)

Рис. 1.

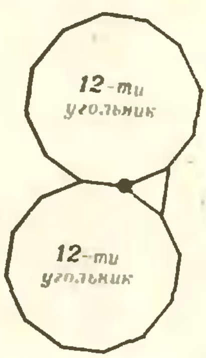


а)

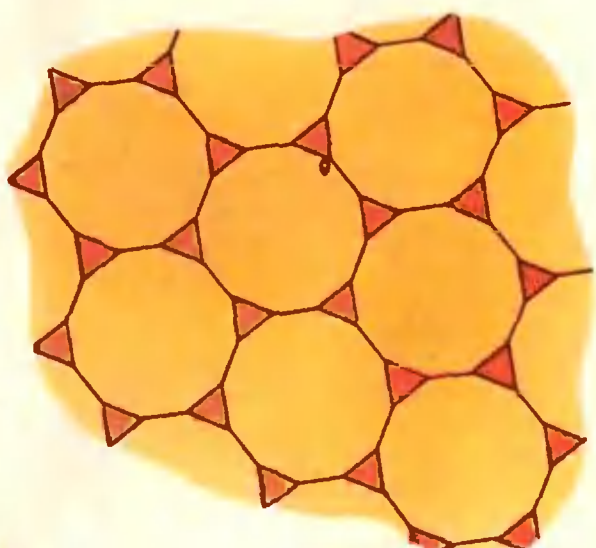


б)

Рис. 2.



а)



б)

Рис. 3.

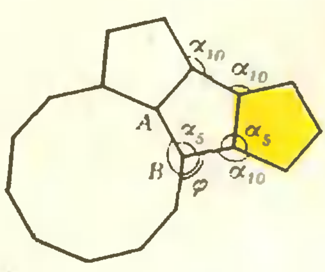


Рис. 4.

При схождении в одной вершине двух многоугольников у одного из них внутренний угол должен быть более $2d$ (180°), что, очевидно, также невозможно. Таким образом, решение задачи распадается на анализ тех вариантов, когда в вершине паркета сходятся 3, 4, 5 и 6 правильных многоугольников.

Паркеты с тремя многоугольниками в вершине

Здесь, в свою очередь, в принципе возможны три случая (в зависимости от набора многоугольников в каждой вершине):

1°. Три одинаковых многоугольника.

2°. Два одинаковых и один отличный от них.

3°. Три различных многоугольника.

В первом случае сумма в уравнении (1) сводится к одному слагаемому, отвечающему трем одинаковым n-угольникам, поэтому мы получаем $3\left(1-\frac{2}{n}\right)=2$ или $n=6$, то есть к каждой вершине примыкает 3 шестиугольника. Это один из простейших правильных паркетов (рис. 1).

Для второго случая (два k-угольника, один n-угольник) имеем
$$\left(1-\frac{2}{n}\right)+2\left(1-\frac{2}{k}\right)=2 \text{ или } k=\frac{4n}{n-2}.$$
Целочисленные решения последнего уравнения проще всего найти перебором различных значений:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k			12	8	$\frac{20}{3}$	6	$\frac{28}{5}$	$\frac{32}{6}$	$\frac{36}{7}$	5	$\frac{44}{9}$

Продолжать перебор дальше нет смысла, так как целочисленных k мы больше не получим: $\frac{4n}{n-2}=4+\frac{8}{n-2}$, а при $n>10$ последнее слагаемое не может быть целым.

Таким образом, кроме уже рассмотренного случая $n=k=6$ мы получили три решения, которые мы запишем в виде суммы углов в

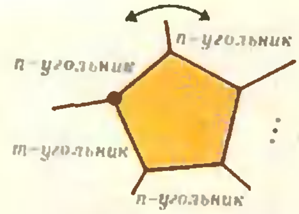
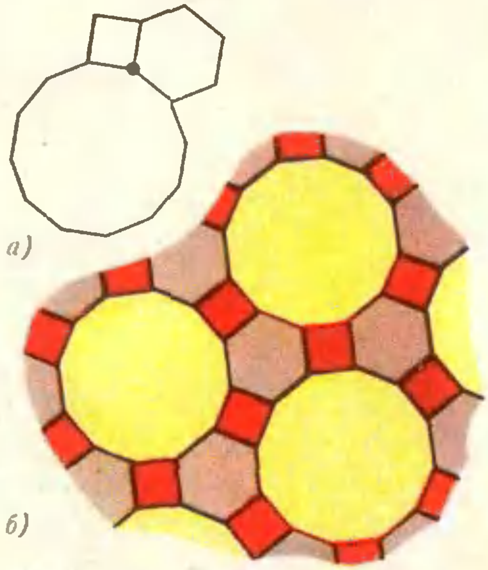


Рис. 5.



а)

б)

Рис. 6.

вершине:
$$\alpha_4+2\alpha_8;\quad \alpha_3+2\alpha_{12};\quad \alpha_{10}+2\alpha_5.$$
Первому решению отвечает паркет, часто встречающийся на практике (рис. 2). Менее обычный паркет, отвечающий второму решению, изображен на рисунке 3.

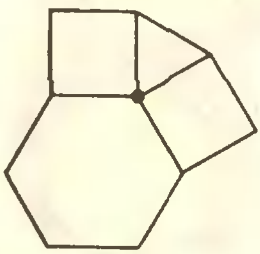
А вот комбинация $\alpha_{10}+2\alpha_5$, в отличие от ранее рассмотренных, правильного паркета не образует. Убедиться в этом позволяет «достройка» (рис. 4) окружения вершины A еще одним многоугольником (желтого цвета). Из нее видно, что один из углов при вершине B (угол, обозначенный на рисунке 4 через φ), по принципу эквивалентности вершин, должен быть равен α_{10}. На самом же деле, угол φ равен α_5 — правильного паркета типа $\alpha_{10}+2\alpha_5$ *не существует*.

Для оставшегося, наиболее сложного, *третьего случая* (три разных многоугольника с n, m и k вершинами) уравнение (1) приводится к виду
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}. \qquad (2)$$
Чтобы не разбирать всех возможных

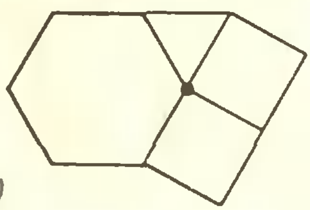
а)

б)

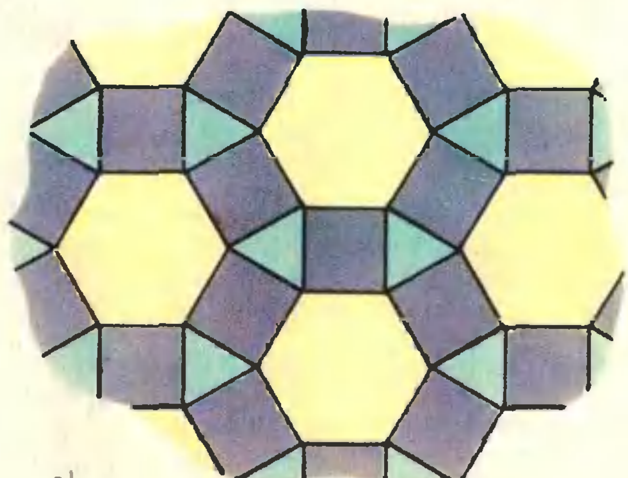
Рис. 7.



а)

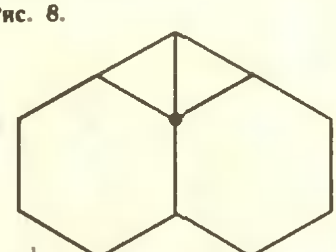


б)

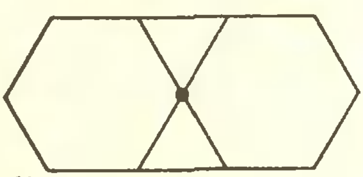


в)

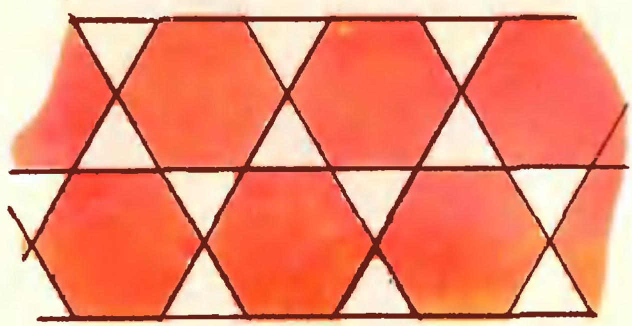
Рис. 8.



а)

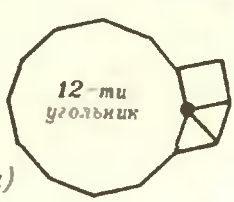


б)



в)

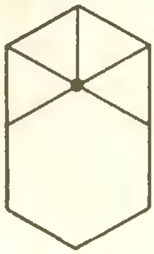
Рис. 9



а)

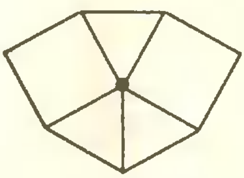
б)

Рис. 10.


а)

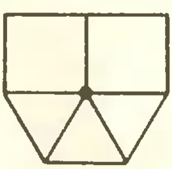

б)

Рис. 11.


а)


б)

Рис. 12.


а)

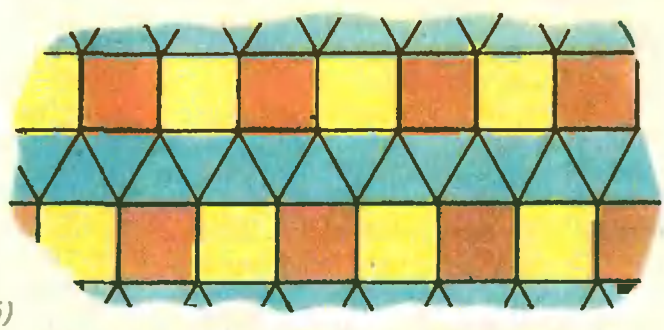
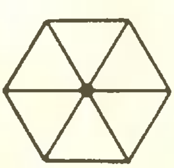

б)

Рис. 13.


а)

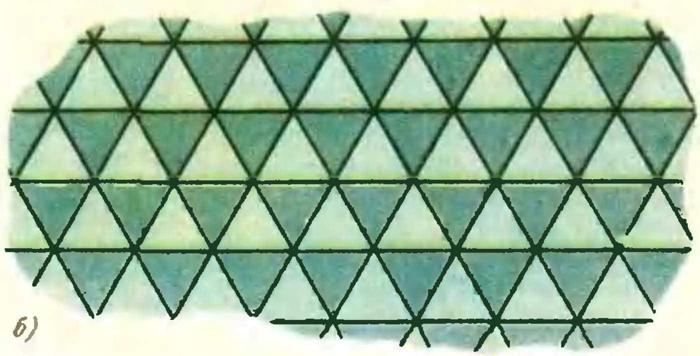

б)

Рис. 14.

числовых решений, нам будет нужна следующая

Лемма. *В вершине правильного паркета не могут сходиться три различных многоугольника, у одного из которых нечетное число сторон.*

Действительно, пусть такой паркет существует (рис. 5). Тогда вокруг нечетноугольника оставшиеся m- и n-угольники должны идти чередуясь. Поэтому при его обходе рядом окажутся два одинаковых многоугольника, вопреки условию леммы.

Благодаря лемме мы можем в (2) заменить k на $2k_1$, m на $2m_1$, l на $2l_1$ и перейти к уравнению

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{k_1}=1.$$

Не нарушая общности, можно предположить, что $k_1<m_1<n_1$. Тогда

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{k_1}<\frac{3}{k_1},$$

поэтому $k_1=2$. Следовательно, $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}=\frac{1}{2}$, откуда $m_1=3$, $n_1=6$ (если $m_1\geqslant 4$, то $n_1\leqslant m_1$). Полученное решение $\alpha_4+\alpha_6+\alpha_{12}$ дает нам очередной паркет (рис. 6).

Паркеты с четырьмя многоугольниками в вершине

В этом случае мы приходим к уравнению

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1. \qquad (3)$$

Будем считать, что $l\leqslant k\leqslant m\leqslant n$. Легко видеть, что тогда $l\leqslant 4$. Если $l=4$, то приходим к набору $4\alpha_4$. Если $l=3$, то получаем уравнение

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{2}{3},$$

из которого находим, что $k<5$. Если $k=4$, то, поскольку $m\geqslant k$, приходим к единственному решению $m=4$, $n=6$. Если же $k=3$, то получаем два решения: $m=4$, $n=12$ и $m=6$, $n=6$.

Нам, следовательно, предстоит исследовать четыре набора:

$4\alpha_4$; $\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6$; $2\alpha_3+2\alpha_6$; $\alpha_4+2\alpha_3+\alpha_{12}$.

Первый набор $4\alpha_4$ дает тривиальный квадратный паркет (рис. 7).

Для комбинации $\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6$ возможны две неэквивалентные вершины (рис. 8, *а*, *б*), но только вариант 8,*а* дает правильный паркет (рис. 8,*в*). Убедитесь самостоятельно, что вариант 8,*б* не дает никакого правильного паркета.

Для $2\alpha_3+2\alpha_6$ также возможны две различные вершины (рис. 9, *а*, *б*), но только вторая дает правильный паркет (9, *в*). Достройка первой приводит к противоречию с принципом эквивалентности вершин.

Рассмотрим, наконец, последнее решение $\alpha_4+2\alpha_3+\alpha_{12}$. Здесь оба возможных варианта (рис. 10, *а*, *б*) приводят при достройке к противоречию. Таким образом, «четырехмногоугольных» паркетов три:

$4\alpha_4$; $\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6$; $2\alpha_3+2\alpha_6$.

Паркеты с пятью многоугольниками в вершине

В этом случае нужно найти решения уравнения

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{j}=\frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Из него сразу видно, что $j=k=l=3$ (мы считаем, что $j\leqslant l\leqslant k\leqslant m\leqslant n$). Получилось уравнение $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$, у которого два решения: $m=3$, $n=6$ и $m=4$, $n=4$.

Остается теперь рассмотреть найденные комбинации:

$$\alpha_6+4\alpha_3 \quad \text{и} \quad 2\alpha_4+3\alpha_3.$$

Первая из них дает единственный тип вершины и единственный правильный паркет (рис. 11). Вторая комбинация допускает две неэквивалентные вершины, причем каждая из них образует паркеты (рис. 12 и 13).

Таким образом, «пятимногоугольных» паркетов три:

$4\alpha_3+\alpha_6$; $(2\alpha_4+3\alpha_3)'$; $(2\alpha_4+3\alpha_3)''$.

Паркеты с шестью многоугольниками в вершине

Совершенно очевидно, что такой паркет (рис. 14) — единственный, получающийся из комбинации $6\alpha_3$.

Перечисленными выше случаями исчерпывается все многообразие правильных паркетов. Как видно из сказанного, общее число их — одиннадцать.

И. Белкин

О Ньютоновских законах движения.

Масса

Законы механического движения тел были открыты Ньютоном в середине XVII века. Изложены они были в его книге «Математические начала натуральной философии», напечатанной в 1687 году. Без преувеличения можно сказать, что с этой книги началась современная механика.

Об основных идеях механики и открытых Ньютоном законах движения и будет рассказано в этой статье.

Немного о механике до Ньютона

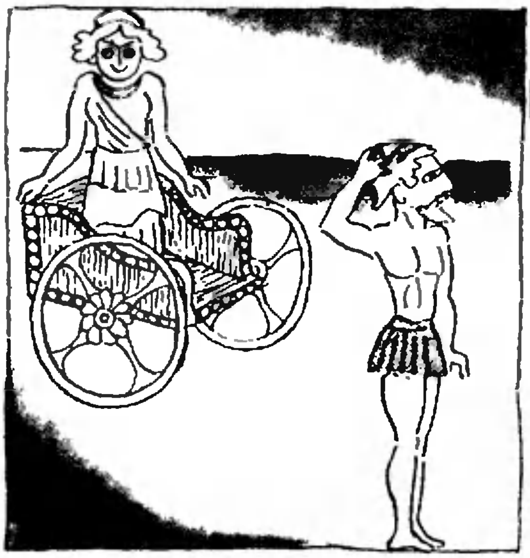
Чтобы понять суть той революции в науке о движении тел, которую совершил Ньютон, познакомимся сначала в самых общих чертах с наукой о движении, которая существовала до Ньютона.

Наибольшей известностью в доньютоновские времена пользовалась механика Аристотеля (384—322 до н. э.). О ней мы здесь вкратце и расскажем, хотя эта теория почти во всех своих частях оказалась ложной. Но именно ей пришла на смену механика Ньютона.

В своих построениях и умозаключениях Аристотель опирался на наблюдения, повседневный опыт. (На такой основе, несомненно, и строится наука.) Однако наблюдения эти часто были поверхностными и не сопровождались измерениями. Поэтому и выводы, сделанные Аристотелем, оказались неверными.

Наблюдения показывают, например, что повозка на ровной дороге движется лишь тогда, когда ее тянет лошадь. Значит, для того чтобы тело двигалось (обладало *скоростью*), нужно, чтобы на него влияло другое тело. Это влияние одного тела на другое назовем силой. По Аристотелю сила — причина *движения*. При отсутствии силы возможен покой и только покой.

С другой стороны, наблюдения показывают, что существуют движения,



обходящиеся «без лошадей», без сил. Так, всякое тяжелое тело само по себе падает, движется вниз; легкие тела (дым, нагретый воздух и т. д.) движутся вверх и тоже сами собой. Наблюдения, наконец, показывают, что «без лошадей» движутся планеты.

На основании таких наблюдений Аристотель делит все движения на два класса: насильственные и естественные. Причиной насильственных движений является влияние других тел, то есть сила. Что касается движений естественных, то здесь причина совсем другая. Аристотель определяет ее так: всякому телу природой предназначено определенное место. Тяжелым телам отведено место внизу, легким — наверху. Планетам и звездам предопределено вечное вращение вокруг Земли. Так что причиной естественных движений является стремление тел занять то место, которое им определено природой.

Но тяжелые тела могут двигаться и вверх. Как быть с брошенным вверх камнем? Согласно Аристотелю это уже насильственное движение. А причина его заключена в том, что природа не допускает существования пустоты: воздух стремится немедленно заполнить место, освобождаемое телом при движении, и все время подталкивает это тело. (Это представление о «боязни пустоты» сохранялось в физике вплоть до Галилея и Торричелли, которые, наконец, покончили с ним.)

Мы видим, что механика Аристотеля не была единой наукой о законах движения. Различным движениям приписывались различные причины, а сами причины формулировались очень неопределенно. Но авторитет Аристотеля был столь велик, что его механика просуществовала почти два тысячелетия, до времен Галилея и Ньютона.

Механика Ньютона. Первый закон механики

В отличие от наивных представлений доньютоновской механики, механика Ньютона является единой теорией, относящейся к любым движениям тел. Все движения подчиняются одним и тем же строгим законам. Что же это за законы?

В механике Ньютона прежде всего обращается внимание на то, что движение должно изучаться относительно определенной системы отсчета. Фактически Ньютон пользуется системой отсчета, связанной с Солнцем.

В ту пору было уже известно, как движутся планеты относительно Солнца (законы движения планет были изучены Кеплером). Анализируя эти движения, а также движения тел на Земле, изученные отчасти им самим, отчасти его предшественниками, прежде всего — Галилеем, Ньютон пришел к фундаментальному выводу: если какое-либо тело движется относительно Солнца с ускорением, то это ускорение всегда вызвано влиянием на тело какого-либо другого тела или нескольких тел. Так, с ускорениями движутся планеты. Эти ускорения вызваны влиянием Солнца. Ускорение падающего на Землю тела вызвано влиянием Земли. Ускорение тела, прикрепленного к пружине, вызвано влиянием пружины и т. д. Это — закон природы: ускорение любого тела относительно Солнца всегда вызвано влиянием на него какого-либо тела или тел. По Аристотелю сила — причина движения (скорости) тела и притом только насильственного. В механике Ньютона сила — причина *изменения движения* (изменения скорости — ускорения) тел при *любых* движениях.

А как должно вести себя тело, на которое не влияют другие тела? Согласно Аристотелю такое тело должно покоиться, скорость его должна быть равна нулю. По Ньютону у такого тела в системе отсчета, связанной с Солнцем, должно быть равно нулю ускорение. Это значит, что в этой системе тело, на которое не влияют другие тела, может или покоиться, или двигаться прямолинейно и равномерно. В этом и состоит первый закон Ньютона — закон инерции.

Закон инерции справедлив не только тогда, когда на тело не влияют никакие другие тела. Ему подчиняются и такие тела, которые испытывают влияние других тел, но этих «других» тел не одно, а несколько, и влияние каждого из них компенсируется всеми остальными. Слово «инерция» и обозначает явление, состоящее в том, что тело, на которое не влияют другие тела (силы) или влияния на которое других тел компенсируются, не изменяет своего движения, то есть не изменяет своей скорости.

Как мы говорили, Ньютон рассматривал движение в системе отсчета, связанной с Солнцем. Но если тело движется с постоянной скоростью относительно Солнца, то относительно любого другого тела, движущегося без ускорения относительно Солнца, оно также движется с постоянной скоростью (но уже другой). Так что в системе отсчета, связанной с этим «другим» телом, тоже выполняется закон инерции. Все такие системы называются *инерциальными*.

Первый закон Ньютона теперь принято формулировать так: *существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела или действие других тел компенсируется.*

А если связать систему координат с телом, которое относительно инерциальной системы координат само движется с ускорением?

Относительно такой системы любое тело, на которое не влияют другие тела, будет двигаться с ускорением. В этой системе тело может находиться в покое, несмотря на влияние на него другого тела. Все такие системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются неинерциальными.

Можно ли говорить, что система координат, связанная с Землей, — инерциальная? Строго говоря, нет, потому что Земля движется вокруг Солнца по криволинейной траектории (почти по окружности), и следовательно, относительно Солнца она движется с ускорением. Кроме того, Земля вращается около своей оси. Это движение тоже ускоренное. Но вокруг Солнца Земля совершает всего один оборот за год, а около оси — за сутки. Оба ускорения настолько малы, что в большинстве случаев Землю можно принимать за инерциальную систему отсчета.

Факт существования в мире инерциальных систем отсчета вовсе не представляется очевидным, само собой разумеющимся. Античным мыслителям (Аристотелю) было трудно понять, почему тела продолжают двигаться и после того, как влияние на них других тел прекратилось. Почему, например, стрела продолжает свой полет после того, как тетива лука перестала ее толкать?

Галилей первым заметил ошибочность убеждения в том, что другие тела должны поддерживать движение (скорость) данного тела. Он задался вопросом: какое свойство движения тела зависит от влияния на него других тел? Никакие умозрительные рассуждения не могут дать ответ на этот вопрос. Здесь нужно обратиться непосредственно к природе, то есть к опыту.

Ответ, который дала природа, оказался неожиданным и состоит в следующем: существуют инерциальные системы отсчета; в них для поддержания движения тела с постоянной скоростью ничего не требуется — оно происходит само собой.

Когда такой ответ был получен, это явилось крупнейшим открытием. Именно поэтому закон инерции относится к числу важнейших законов природы.

Взаимодействие тел и ускорения. Масса

Еще один важный факт установил Ньютон из наблюдений за движениями тел. Он состоит в том, что когда какое-нибудь тело влияет на другое тело и сообщает ему ускорение, то это другое тело «отвечает» ему тем же, то есть сообщает и ему ускорение. Влияние одного тела на другое не является односторонним — тела *взаимодействуют*, сообщая друг другу ускорения. Если, например, сталкиваются два шара (столкновение — это пример взаимодействия), ускорение получает каждый из них. Каковы эти ускорения? Как они направлены? Каковы их численные значения?

Опыт показывает, что во всех случаях ускорения взаимодействующих тел противоположны по направлению.

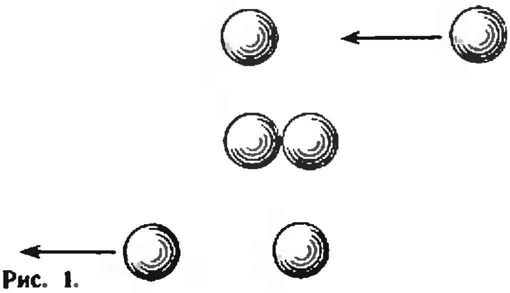


Рис. 1.

Если, например, движущийся шар сталкивается с таким же неподвижным шаром так, что скорость шара направлена по линии, соединяющей центры шаров (рис. 1), то скорость первого из них уменьшится, а скорость второго — увеличится. А это и означает, что ускорения шаров противоположны по направлению.

Что касается абсолютных значений (модулей) ускорений, то они могут быть любыми. Это зависит от того, как двигались тела до взаимодействия (от начальных условий), от характера взаимодействия, от того, какие именно тела взаимодействуют. Но для данной пары взаимодействующих тел отношение ускорений всегда одно и то же. Оно не зависит ни от характера взаимодействия, ни от начальных условий. Значит, зависит оно от какого-то особого свойства, таящегося в самих взаимодействующих телах. Свойство это, внутренне присущее каждому телу, выражается величиной массы тела.

Ньютон открыл это свойство и ввел в науку величину, количественно характеризующую его, — массу. Что это за свойство?

Представим себе, что два взаимодействующих тела — это два шара одинаковых объемов. Первый из них — деревянный, второй — алюминиевый. Если они каким-то образом станут взаимодействовать (они могут столкнуться, взаимодействовать через пружину (рис. 2, *а*); взаимодействие может осуществляться посредством нити, связывающей шары, вращающиеся на центробежной машине (рис. 2, *б*); это может быть электрическое взаимодействие, если шары электрически заряжены), то каждый из них изменит свою скорость — получит ускорение (рис. 2). И в любом случае ускорение $\vec{a}_1$ деревянного шара окажется в 5 раз больше ускорения $\vec{a}_2$ алюминиевого шара:

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = 5.$$

И вообще, для любых двух взаимодействующих тел

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \text{const} \qquad (1)$$

— отношение абсолютных значений ускорений, приобретаемых в процессе взаимодействия, есть величина постоянная.

Напомним, что ускорение $\vec{a}$ тела равно быстроте изменения скорости, то есть изменению скорости в единицу времени:

$$|\vec{a}_1| = \frac{|\Delta\vec{v}_1|}{\Delta t}, \quad |\vec{a}_2| = \frac{|\Delta\vec{v}_2|}{\Delta t}.$$

Здесь $\Delta\vec{v}_1$ — изменение скорости деревянного шара, $\Delta\vec{v}_2$ — алюминиевого, Δt — время, в течение которого шары взаимодействовали. Именно за это время и произошло изменение скоростей обоих шаров. Но деревянный шар за это время «успел» изменить свою скорость на величину в 5 раз большую, чем алюминиевый:

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = 5.$$

То присущее всем телам свойство, проявляющееся при их взаимодействии, о котором идет речь, и состоит в том, что для *изменения скорости тела требуется время*. Ни набрать скорость, ни, наоборот, потерять ее тело не может мгновенно. Называется это свойство *инертностью*. Из двух взаимодействующих тел то из них более инертно, которое за время взаимодействия меньше изменило свою скорость. (Отсюда и название этого свойства — инертность: ведь когда скорость тела вовсе не изменяется, говорят, что тело движется по инерции.)

Количественную меру этого свойства Ньютон назвал *массой* (часто говорят — инертная масса): более инертное тело обладает и большей массой (инертной). Масса алюминиевого шара в 5 раз больше массы такого же по размеру деревянного шара.

Поэтому вообще для отношения модулей ускорений двух взаимодействующих тел можно написать равенство

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}, \qquad (2)$$

где m_1 и m_2 — массы соответственно первого и второго тела.

Соотношение (2) дает нам в руки метод измерения массы любого тела.

В самом деле, измерить массу тела — значит сравнить ее с массой тела-эталона, принятой за единицу (так же, как, например, измерение длины тела сводится к сравнению ее с длиной эталона длины — например, метра). В качестве эталона массы, как известно, принят 1 килограмм (это — масса цилиндра из специального сплава, который хранится в Международном бюро мер и весов (во Франции); копии эталона хранятся во многих государствах мира; в СССР имеются даже две копии).

Для измерения массы m какого-нибудь тела надо его привести во взаимодействие с эталоном (или с его копией) и измерить ускорение обоих тел. Тогда массу m мы найдем из

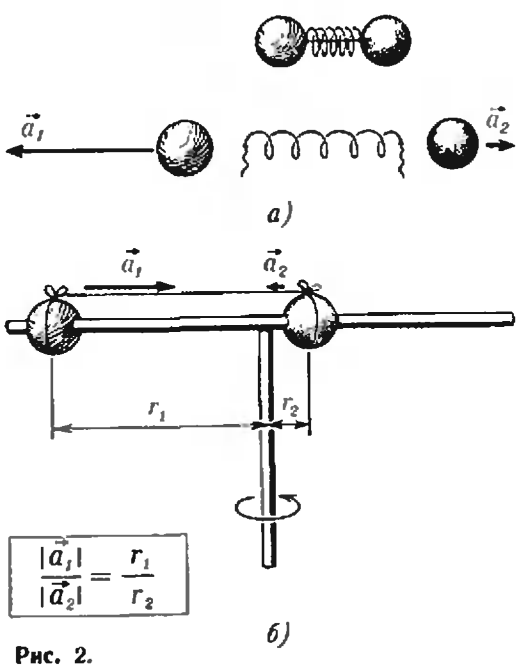


Рис. 2.

соотношения

$$\frac{m}{m_{эт}} = \frac{|\vec{a}_{эт}|}{|\vec{a}|}, \qquad (3)$$

где $m_{эт}$ — масса эталона, $\vec{a}_{эт}$ и $\vec{a}$ — соответственно ускорения эталона и тела, приобретаемые в процессе взаимодействия. Из (3) находим

$$m = \frac{|\vec{a}_{эт}|}{|\vec{a}|} m_{эт} = \frac{|\vec{a}_{эт}|}{|\vec{a}|} 1\ (\text{кг}). \qquad (3а)$$

Но вернемся к соотношению (2), из которого следуют формулы (3) и (3а). Вдумаемся, в какой мере оно обосновано опытом. Опыт нам показал лишь, что отношение ускорений двух взаимодействующих тел—вполне определенная величина (формула (1)).

Далее мы условились (именно условились!) приписать телу, ускорение которого меньше, то есть более инертному телу, бо́льшую массу.

Математически мы это выразили уравнением (2), из которого и следует, что большей массе соответствует меньшее ускорение. Но вместо уравнения (2) можно написать, например, следующую формулу:

$$\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \frac{m_1^2}{m_2^2}$$

или

$$\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \frac{m_1^n}{m_2^n}. \qquad (*)$$

Из этих формул тоже следует, что из двух взаимодействующих тел меньшее ускорение получает тело большей массы! Почему же мы выбрали простейшую формулу (2), из которой следует приведенный выше способ измерения массы?

Потому что при таком способе измерения массы оказывается, что масса нескольких тел, сложенных вместе, равна сумме масс слагаемых тел (закон сохранения массы).

Представим себе, что при взаимодействии двух тел A и B мы измерили их ускорения и, пользуясь формулой (2), нашли, что масса тела B втрое больше массы тела A (рис. 3, *а*):

$$m_B = 3m_A.$$

Возьмем еще третье тело D, приведем его во взаимодействие с телом A, измерим ускорения этих тел и найдем отношение их масс. Предположим, оказалось, что масса тела D вдвое больше массы тела A (рис. 3, *б*):

$$m_D = 2m_A.$$

Соединим теперь вместе тела B и D. Приведем «сложное» тело $B + D$ во взаимодействие с телом A и по измеренным их ускорениям найдем отношение массы тела $B + D$ к массе тела A. Опыт покажет, что (рис. 3, *в*)

$$m_{B+D} = 5m_A.$$

Выходит, что

$$m_{B+D} = m_B + m_D$$

— массы складываются.

Если для измерения масс тел пользоваться соотношением (*), то окажется, что массы тел не складываются. Вот почему в физике принято соотношение (2).

В быту и в технике, в научных исследованиях часто (но не всегда) массу измеряют другим способом — взвешиванием. Этот способ не связан с законами движения; он связан с законом всемирного тяготения, и им измеряется не инертная, а так называемая гравитационная масса. Но удивительным образом эти две совершенно различные по своей роли в механике массы совпадают. В этой статье идет речь об инертной массе, которая является мерой инертности тела. Именно из-за существования инертной массы, из-за существования свойства инертности взаимодействие тел оказывается причиной появления ускорений (а не скоростей) у взаимодействующих тел.

В обиходе, а иногда и в книгах по физике под словом «масса» подразумевается количество вещества в теле. Но ведь количество вещества в теле определяется числом частиц (атомов или молекул) данного вещества в нем. А масса определяет инертность тела и ничего больше. Но масса тела из данного вещества пропорциональна числу частиц этого вещества в теле. Измерять массу легко, а считать число частиц трудно. По этой причине и пользуются массой как мерой количества вещества.

Интересно, что сам Ньютон определял массу именно как количество

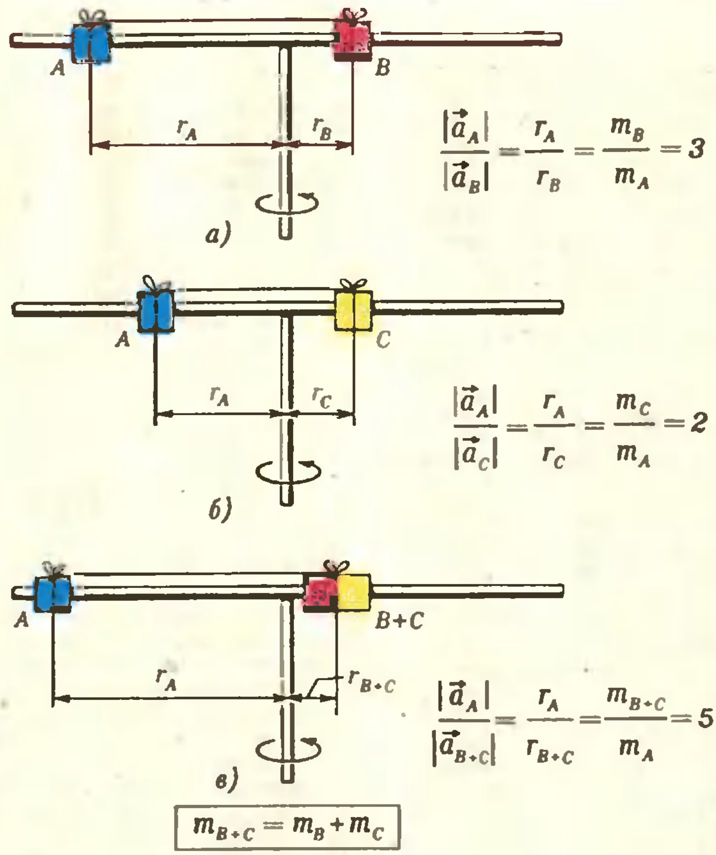


Рис. 3.

вещества. Но это объясняется тем, что в то время считалось, что все вещества состоят из совершенно одинаковых атомов, лишь различным образом движущихся. Поэтому одинаковые массы содержали и одинаковые количества вещества. Истинный же смысл массы состоит в том и только в том, что масса — мера инертности тел. Никакого другого смысла масса в механике Ньютона не имеет.

Масса в теории относительности

(Добавление)

В начале нынешнего столетия Эйнштейном была создана так называемая специальная теория относительности, совершившая в физике не меньшую по значению революцию, чем в свое время механика Ньютона. Она оказала влияние на всю физику, и механика не составила исключения. Теория относительности показала, что законы механики Ньютона верны лишь приблизительно. В частности, не вполне точна и приведенная нами формула (1). Если два тела взаимодействуют так, как показано на рисунке 2, *б*, и приобретают при этом ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, то в действительности постоянным остается не отношение $|\vec{a}_2|/|\vec{a}_1|$, а отношение

$$\frac{|\vec{a}_1|\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}{|\vec{a}_2|\sqrt{1 - v_1^2/c^2}},$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — соответственно скорости первого и второго тела, c — постоянная величина, имеющая размерность скорости и равная $3\cdot 10^8$ м/с (таково же и значение скорости света!).

Постоянство этого отношения тоже связано со свойством инертности тел, выражаемым их массами. Так что мы опять можем написать, обозначив теперь массы тел через m_1' и m_2':

$$\frac{|\vec{a}_1|\sqrt{1 - v_2^2/c}}{|\vec{a}_2|\sqrt{1 - v_1^2/c}} = \frac{m_2'}{m_1'}.$$

Формулу эту можно переписать в таком виде:

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2'\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{m_1'\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}. \qquad (4)$$

Сравнивая формулы (4) и (2), мы видим, что массы m_1' и m_2', о которых идет речь в теории относительности, и ньютоионские массы m_1 и m_2 связаны соотношениями

$$m_1' = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}, \quad m_2' = \frac{m_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}. \qquad (5)$$

Они показывают, что масса тела вовсе не является постоянной величиной — она зависит от скорости движения тела и возрастает с ростом скорости. А так как скорость — величина относительная и изменяется при переходе от одной системы координат к другой, то и масса — величина относительная.

Однако, когда скорости тел очень малы по сравнению со скоростью света c, то, как это видно из формул (5), можно считать, что $m_1' = m_1$ и $m_2' = m_2$. Это значит, что ньютоновские массы m_1 и m_2 — это инертные массы медленно движущихся, в пределе — покоящихся, тел. Их так и называют *массами покоя*. В механике Ньютона инертность тела выражается массой покоя, которая действительно является неизменяющейся характеристикой тела.

Те скорости, которые встречаются в обычной технической практике, всегда много меньше скорости света. Даже скорости искусственных спутников Земли и космических кораблей (до 40 000 км/ч), даже скорость Земли в ее движении вокруг Солнца (108 000 км/ч) слишком малы, чтобы сказалось влияние скорости на массу, и можно считать, что массы тел, движущихся с такими скоростями,— это все еще постоянные и неизменные массы покоя. Лишь так называемые элементарные частицы могут двигаться со скоростями, близкими к скорости света. Тогда и только тогда механика Ньютона оказывается неверной.

Итак, масса m_v тела, движущегося с некоторой скоростью $\vec{v}$, связана с массой m_0 того же тела, когда оно покоится (относительно той же системы отсчета), соотношением

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Из него особенно ясно видно, что масса не имеет смысла количества вещества. Не может же изменение скорости тела привести к изменению количества вещества (числа частиц) в нем!

Но как же при увеличении скорости может возрасти инертность тела? Почему для изменения скорости на одну и ту же величину быстро движущемуся телу нужно больше времени, чем медленно движущемуся? Не вдаваясь здесь в подробности, связанные с не совсем обычными идеями теории относительности, заметим, что масса согласно этой теории связана с энергией и связана так, что эти два понятия оказываются эквивалентными друг другу. Можно поэтому сказать, что энергия, которую сообщают телу, чтобы увеличить его скорость, как бы преобразуется в массу, которая и растет с ростом скорости.

В механике Ньютона масса — это только мера инертности тела. В механике теории относительности масса — это еще и мера энергии.

Кроме массы важнейшую роль в механике Ньютона играет понятие силы. Более подробно о силе в механике Ньютона мы расскажем в другой статье.

Как быть?

В некоторой школе, в некотором (десятом) классе ученики искали первообразную для функции

$f(x) = \sin x \cdot \cos x.$

И было получено два ответа:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Поскольку все полагали, что нашли одну и ту же первообразную, на доске появилось равенство

$$\frac{1}{2}\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x,$$

откуда быстренько оказалось

$\sin^2 x + \cos^2 x = 0,$

или, попросту говоря,

$1 = 0.$

От такой чепухи надо было поскорее избавиться и полученные ответы были записаны иначе:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

Однако на доске опять появилось равенство

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C,$$

из которого после вычитания C снова получилось $1 = 0$.

И тогда ответы были записаны совсем аккуратно:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2.$$

Но ведь этими постоянными могут быть любые числа, в том числе — одни и те же. И опять на доске появилось равенство

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + 1979 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + 1979,$$

из которого после вычитания 1979 снова получилось $1 = 0$.

В той школе, в том классе в конце концов поняли, что можно и чего нельзя писать, когда имеешь дело с первообразными. А вы?

В. Рыжик

М. Грабовский

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

В этой статье рассматриваются довольно простые опыты, на которых можно познакомиться со сложением двух взаимно перпендикулярных колебаний. Попробуйте самостоятельно проделать предлагаемые опыты и объяснить полученные результаты.

1. В верхнюю часть рамы дверного проема вбейте гвоздь. Слегка согните его, придав ему форму крючка. Привяжите к крючку тонкую прочную некрутящуюся нить (бечевку) длиной 1,4—1,6 м. К свободному концу нити привяжите гирю массой 0,5—0,6 кг.

Вы получите так называемый *математический маятник*. При небольших отклонениях от положения равновесия (а также при указанных значениях длины нити и массы гири) колебания маятника можно считать *гармоническими*.

С помощью секундомера или секундной стрелки наручных часов определите период колебаний маятника в плоскости дверной рамы (будем называть ее *основной плоскостью*). Повторите опыт, вызвав колебания маятника с той же амплитудой в плоскости, перпендикулярной основной (назовем ее *перпендикулярной плоскостью*). Убедитесь в том, что найденные значения периодов колебаний в обоих случаях практически совпадают.

Теперь проделайте опыты по сложению двух указанных колебаний. Сначала вызовите колебания маятника с амплитудой 20—25 см в основной плоскости вдоль оси X. Затем толкните груз (например, с помощью молоточка) с расчетом вызвать его колебания в перпендикулярной плоскости вдоль оси Y.

Вы увидите, что движение груза изменится. Прежде всего груз будет двигаться по другой траектории, причем эта траектория определяется соотношением амплитуд слагаемых колебаний и начальным сдвигом фаз между ними.

Какие же виды траекторий возможны? Рассмотрим сначала несколько частных случаев. Предположим, вы ударили по грузу в тот момент, когда он проходил положение равновесия, — груз будет колебаться *по прямой*, составляющей некоторый угол с осью X (рис. 1).

Теперь ударьте по грузу в момент его наибольшего смещения из положения равновесия — груз начнет двигаться *по эллипсу* (рис. 2). Если же нанести удар в другом крайнем положении груза (с противоположной стороны от положения рав-

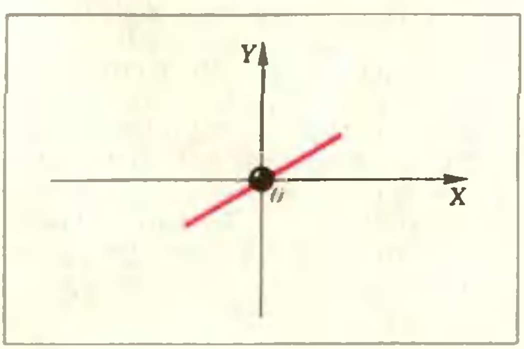


Рис. 1.

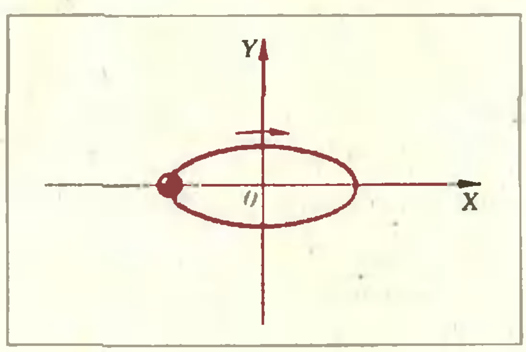


Рис. 2.

новесия), траекторией груза будет по-прежнему эллипс, но направление движения изменится на противоположное.

Оказывается, и во всех остальных случаях груз будет двигаться тоже по эллипсу, причем направление движения будет определяться тем, к какому именно крайнему положению близок груз в момент удара. Проверьте это. Кроме того, убедитесь в том, что движение по любой траектории происходит с периодом, равным периоду колебаний маятника в одной плоскости.

Заметим, что для успешного проведения описанных опытов необходима некоторая тренировка. Особенно трудно наносить удары по грузу в положении равновесия, когда скорость движения груза наибольшая.

Давайте попробуем объяснить полученные результаты. Ограничимся рассмотрением частных случаев. Пусть колебания маятника по оси X (в основной плоскости) происходят по закону

$$x = x_m \cos \omega t,$$

а по оси Y — по закону

$$y = y_m \cos (\omega t - \varphi_0).$$

Здесь x и y — смещения маятника от положения равновесия, x_m и y_m — амплитуды колебаний, ω — циклическая частота колебаний и φ_0 — начальный сдвиг фаз.

В первом частном случае, когда удар наносится в положении равновесия, сдвиг фаз φ_0 может быть равным либо 0, либо π.

Если $\varphi_0 = 0$, колебания маятника описываются уравнениями

$$x = x_m \cos \omega t \quad \text{и} \quad y = y_m \cos \omega t.$$

Поделим второе уравнение на первое:

$$\frac{y}{x} = \frac{y_m}{x_m}, \text{ или } y = \frac{y_m}{x_m} x.$$

Это уравнение прямой, наклоненной к оси X под углом α таким, что $\operatorname{tg} \alpha = y_m/x_m$. В частности, при равенстве амплитуд колебаний ($y_m = x_m$) $\operatorname{tg} \alpha = 1$ и $\alpha = 45°$.

Если $\varphi_0 = \pi$, уравнения колебаний маятника таковы:

$$x = x_m \cos \omega t,$$

$$y = y_m \cos(\omega t - \pi) = -y_m \cos \omega t.$$

Отсюда

$$\frac{y}{x} = -\frac{y_m}{x_m}, \text{ или } y = -\frac{y_m}{x_m} x.$$

При $y_m = x_m$ $\operatorname{tg} \alpha = -1$ и $\alpha = 135°$.

Второй частный случай, когда удар наносится в крайних положениях груза, соответствует сдвигам фаз $\pi/2$ или $3\pi/2$. Для $\varphi_0 = \pi/2$ можно записать:

$$x = x_m \cos \omega t,$$

$$y = y_m \cos (\omega t - \pi/2) = y_m \sin \omega t.$$

После несложных алгебраических преобразований получим:

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} = 1.$$

Это действительно уравнение эллипса.

При $\varphi_0 = 3\pi/2$ результат оказывается тем же.

Если $y_m = x_m$, эллипс превращается в окружность, уравнение которой

$$x^2 + y^2 = x_m^2.$$

Заметим, что при сдвиге фаз $\varphi_0 = \pi/2$ движение груза по эллипсу (или, в частности, по окружности) происходит против часовой стрелки, а при $\varphi_0 = 3\pi/2$ — по часовой стрелке.

II. Перейдем к более сложным опытам. Вбейте в дверной проем еще один гвоздь на расстоянии 30—40 см от первого и опять слегка загните его. Подвесьте груз на двух нитях, прикрепленных к двум крючкам. Вы получите маятник с двойным (или бифилярным) подвесом.

Подберите длины нитей такими, чтобы расстояние от груза до дверного проема было равно длине нити простого маятника, с которым вы проводили первую серию опытов.

Вызовите колебания маятника в перпендикулярной плоскости и экспериментально определите его период колебаний. Убедитесь в том, что найденный период практически совпадает с периодом колебаний математического маятника.

Затем охватите обе нити небольшим проволочным колечком и поднимите колечко как можно выше (рис. 3). Полученный маятник с раздвоенным подвесом может колебаться как в основной, так и в

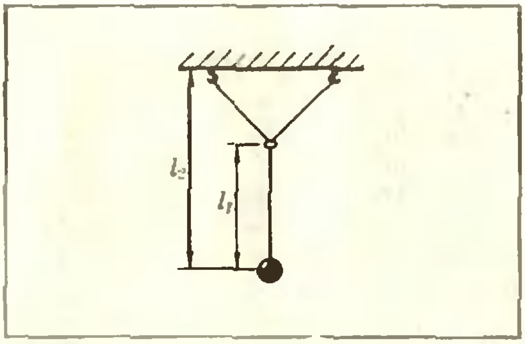


Рис. 3.

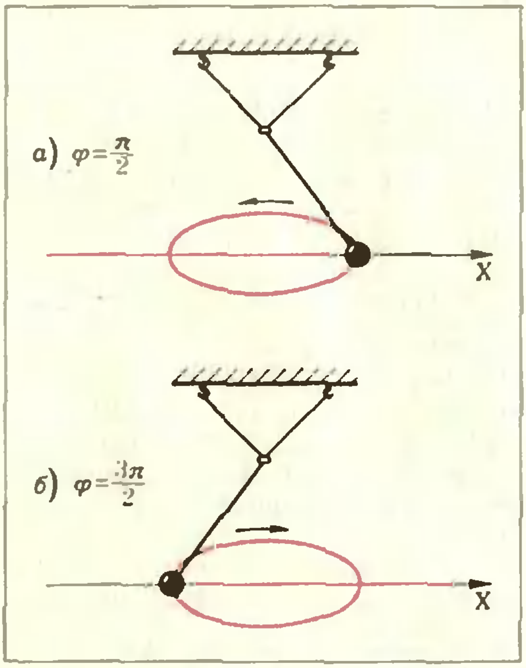


Рис. 4.

перпендикулярной плоскостях, но частоты колебаний будут разными. Это связано с тем, что период колебаний нашего маятника в основной плоскости определяется длиной l_1, а в перпендикулярной плоскости — длиной l_2 (см. рис. 3). Поскольку

$$\omega=\sqrt{g/l} \text{ и } l_1<l_2,$$

получается, что частота колебаний в основной плоскости больше, чем в перпендикулярной.

Как будет себя вести маятник с раздвоенным подвесом, если его заставить колебаться одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях?

Вызовите колебания маятника в основной плоскости. *Когда груз будет находиться в одном из крайних* положений, ударьте по нему в перпендикулярном направлении — маятник начнет колебаться и в перпендикулярной плоскости тоже. *Постарайтесь сделать так, чтобы амплитуды обоих колебаний совпадали.*

Сначала груз движется по окружности вокруг вертикальной оси (рис. 4). Через некоторое время окружность превращается в эллипс. Большая ось эллипса постепенно поворачивается, а малая ось — уменьшается, так что в некоторый момент эллипс стягивается в отрезок. Затем груз опять движется по эллипсу, но уже в противоположном направлении, *через некоторое время* эллипс превращается в окружность. Дальше все периодически повторяется. Характерно, что при каждом переходе эллипса в прямую направление вращения груза изменяется на противоположное.

Попробуем объяснить такое поведение маятника. Напомним, что частоты колебаний маятника в двух взаимно перпендикулярных направлениях не одинаковы — в основной плоскости по оси X частота несколько больше, чем в перпендикулярной по оси Y. Это приводит к тому, что разность фаз колебаний с течением времени постепенно изменяется (а не остается постоянной, *как в первой* серии экспериментов).

Предположим, в начальный момент разность фаз колебаний равна $\pi/2$ — груз движется по окружности против часовой стрелки (см. рис. 4, *а*). Со временем колебания по оси Y отстают от колебаний по оси X все больше и больше — окружность переходит в эллипс. Когда отставание достигнет π, груз будет *колебаться по прямой*, составляющей с осью X угол 135°. При разности фаз $3\pi/2$ груз опять будет двигаться по окружности, но уже по часовой стрелке (см. рис. 4, *б*). Еще через некоторое время разность фаз колебаний станет равной 2π, то есть, другими словами, колебания совпадут по фазе — груз будет двигаться по прямой, наклоненной к оси X под углом 45°. *Наконец, разность* фаз снова увеличится до $\pi/2$ — груз, как и в начальный момент, будет двигаться по окружности против часовой стрелки. И так далее.

Б. Беккер, С. Востоков, Ю. Ионин

2-адические числа

Если бы вас спросили, что можно назвать «расстоянием между двумя рациональными числами», то, подумав, вы, вероятно, дали бы такой ответ: «расстоянием» между двумя числами следует назвать модуль их разности. Такое определение вполне разумно — это «расстояние» удовлетворяет всем аксиомам расстояния (см. «Геометрия 8», п. 132). Но, оказывается, расстояние между рациональными числами, удовлетворяющее всем аксиомам, можно ввести и по-другому. Это сделал немецкий математик К. Гензель (1861—1941) — он придумал даже целый класс таких расстояний. Об одном из них и рассказывается в этой статье.

Исследования Гензеля оказались очень важными для алгебры и математики в целом, а нам его расстояние поможет решить две задачи, на первый взгляд, вообще не связанные ни с какими расстояниями.

2-адическое расстояние

Пусть a и b — рациональные числа. Если $a \neq b$, то представим число $a-b$ в виде $a-b=2^k\cdot\frac{m}{n}$, где m и n — нечетные числа, а k — целое число (положительное, отрицательное или нуль). 2-адическим расстоянием между числами a и b, $a\neq b$, называется число $\rho(a, b)=1/2^k$. Если $a=b$, то положим $\rho(a, b)=0$.

Напомним аксиомы расстояния:

A1. $\rho(a, b)>0$, *если* $a\neq b$, *и* $\rho(a, b)=0$, *если* $a=b$.

A2. $\rho(a, b)=\rho(b, a)$.

A3. $\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c)$.

Свойства A1 и A2 для 2-адического расстояния, а также свойство A3 в случае, если среди чисел a, b, c есть равные, очевидны.

Докажем свойство A3 для различных рациональных чисел a, b, c. Пусть $a-b=2^{k_1}\frac{m_1}{n_1}$, $b-c=2^{k_2}\frac{m_2}{n_2}$, $a-c=2^{k_3}\frac{m_3}{n_3}$, где все m_i, n_i — нечетные числа. Так как $a-c=(a-b)+(b-c)$, то k_3 не меньше меньшего из чисел k_1 и k_2. Но тогда $\frac{1}{2^{k_3}}$ не превосходит большего из чисел $\frac{1}{2^{k_1}}$ и $\frac{1}{2^{k_2}}$ и тем более $\frac{1}{2^{k_3}}\leqslant\frac{1}{2^{k_1}}+\frac{1}{2^{k_2}}$.

Итак, мы видим, что все аксиомы выполняются, так что ρ действительно можно назвать расстоянием.

Что же измеряет это расстояние? Оказывается, оно измеряет степень делимости рационального числа на 2. Чем лучше делится число на 2, тем оно ближе к нулю. Например, 8 ближе к нулю, чем 1/2; 16 ближе к нулю, чем 8; 480 ближе к нулю, чем 16; 384 ближе к нулю, чем 480.

В действительности, мы доказали, что 2-адическое расстояние обладает свойством A3′, более сильным, чем свойство A3. A3′. *Расстояние $\rho(a, c)$ не превосходит большего из расстояний $\rho(a, b)$ и $\rho(b, c)$.*

Упражнение 1. Докажите, что если $\rho(a, b)\neq\rho(b, c)$, то $\rho(a, c)$ равно большему из чисел $\rho(a, b)$, $\rho(b, c)$, а если $\rho(a, b)=\rho(b,c)\neq 0$, то $\rho(a, c)<\rho(a, b)$.

Свойство A3′ приводит к любопытным следствиям. Назовем 2-адическим кругом радиуса r с центром a (a — рациональное число, r — положительное вещественное число) множество рациональных чисел x, для которых $\rho(a, x)<r$.

Упражнения

2. Докажите, что если два 2-адических круга имеют непустое пересечение, то один из этих кругов содержится в другом.

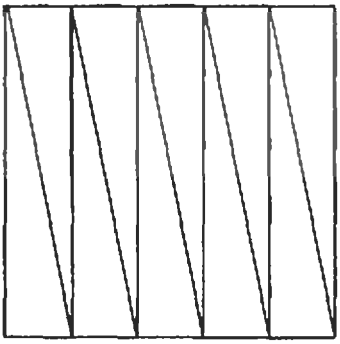


Рис. 1.

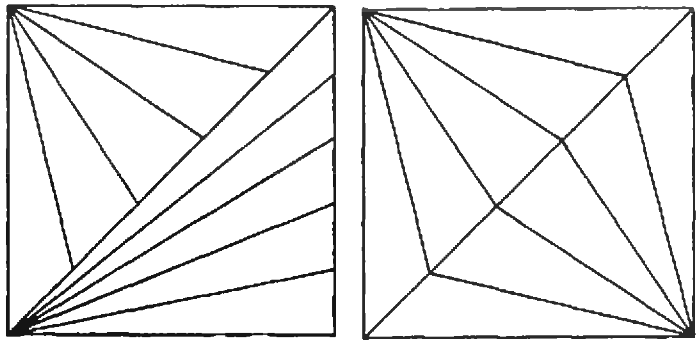


Рис. 2.

3. Докажите, что 2-адический круг радиуса r содержит бесконечно много попарно непересекающихся 2-адических кругов радиуса r.

По аналогии с обычным модулем числа мы определим *2-адический модуль* $\|a\|$ рационального числа a как 2-адическое расстояние от этого числа до нуля: если $a=2^k\frac{m}{n}$, где m и n — нечетные числа, то $\|a\| = \rho(0,a) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Легко установить следующие свойства 2-адического модуля:

M1. $\|a\|>0$, если $a\neq 0$, и $\|0\|=0$.
M2. Если $\|a\|>\|b\|$, то $\|a+b\| = \|a\|$, если $\|a\|=\|b\|\neq 0$, то $\|a+b\|<\|a\|$ *).
M3. $\|ab\| = \|a\|\cdot\|b\|$.

Упражнения

4. Выведите из свойств M1—M3 следующие свойства 2-адического модуля:
а) $\|-a\|=\|a\|$, б) если $\|a\|\neq\|b\|$, то $\|a-b\|=\|a+b\|$.

5. Докажите, что если $\|1-x\|<1$ и $\|1-y\|<1$, то $\|1-xy\|<1$.

Задача о квадрате

На рисунке 1 изображен квадрат, разбитый на конгруэнтные треугольники. Квадраты на рисунке 2 разбиты на треугольники равной площади. В каждом из этих примеров число треугольков разбиения четно.

Задача. *Доказать, что квадрат нельзя разбить на нечетное число треугольников равной площади.*

Выберем на плоскости систему координат таким образом, чтобы вершины O, A, B и C данного квадрата имели координаты $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 1)$. Предположим, что квадрат разбит на n треугольников равной площади. Тогда площадь каждого из треугольников разбиения равна $1/n$. Если n нечетно, то $\|1/n\|=1$, если же n четно, то $\|1/n\|\geqslant 2$. Поэтому четность числа n будет доказана, если мы установим, что $\|1/n\|\geqslant 2$.

Разберем частный случай. Пусть вершины треугольников разбиения — точки с рациональными координатами. В этом случае каждую вершину $(x;\ y)$ можно окрасить в зеленый, красный или синий цвет по следующему правилу: если $\|x\|<1$ и $\|y\|<1$, то точка окрашивается в зеленый цвет; если $\|x\|\geqslant\|y\|$ и $\|x\|\geqslant 1$, то точка окрашивается в красный цвет; если $\|x\|<\|y\|$ и $\|y\|\geqslant 1$, то точка окрашивается в синий цвет (см. рис. 3). Будем считать, что раскрашены не только вершины, а все рациональные точки плоскости.

Упражнение 6. а) Докажите, что если P — зеленая точка, то при параллельном переносе $\overrightarrow{PO}$ (O — начало координат) каждая окрашенная точка сохраняет свой цвет.

б) Докажите, что ни на какой прямой не встречаются точки всех трех цветов.

Предположим, что у одного из треугольников разбиения все вершины — разных цветов (в приложении доказано, что такой треугольник обязательно найдется). Пусть K — зеленая вершина этого треугольника.

При параллельном переносе $\overrightarrow{KO}$ мы снова получим, в силу упражнения 6а), треугольник с вершинами всех трех цветов. Обозначим через $L_1(x_1,\ y_1)$ красную вершину полученного треугольника, а через $L_2(x_2,\ y_2)$ — его синюю вершину (зеленая

*) Так что в любом случае $\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$.

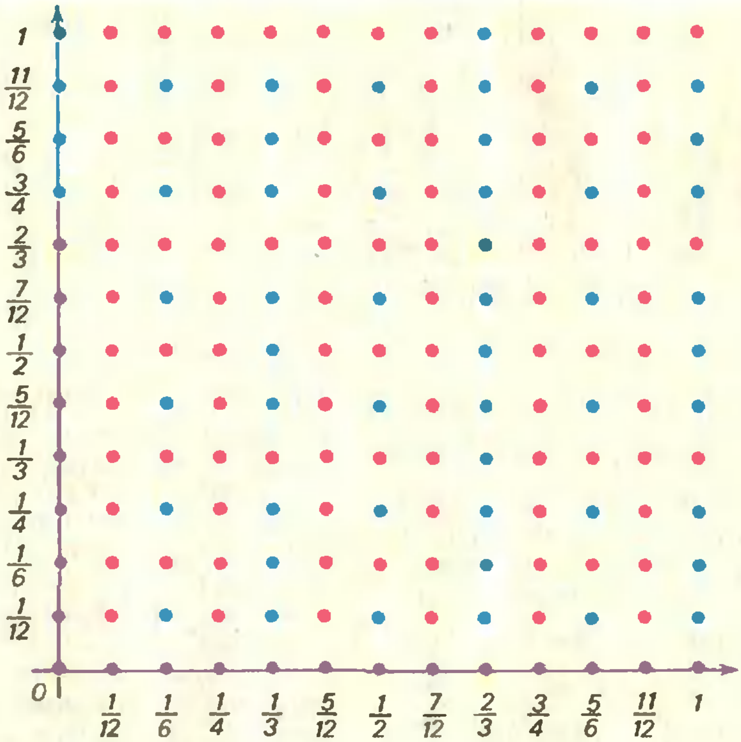


Рис. 3.

вершина этого треугольника — точка O). Так как треугольник OL_1L_2 получен параллельным переносом треугольника разбиения, то его площадь равна $1/n$. С другой стороны, площадь треугольника OL_1L_2 равна $1/2\,|x_1y_2-x_2y_1|$. (Докажите, это самостоятельно.)

Таким образом, мы получили равенство $1/n=1/2\,|x_1y_2-x_2y_1|$. Теперь уже нетрудно установить неравенство $\left\|\frac{1}{n}\right\|\geqslant 2$. В самом деле, так как L_1 — красная точка, а L_2 — синяя точка, то $\|x_1\|\geqslant\|y_1\|$, $\|x_2\|<\|y_2\|$.

Перемножая эти неравенства, мы получаем $\|x_1\|\ \|y_2\|>\|x_2\|\ \|y_1\|$ и, значит, по свойству М3 $\|x_1y_2\|>\|x_2y_1\|$. В силу свойства М2 и упражнения 4б) $\|x_1y_2-x_2y_1\|=\|x_1y_2\|$. Кроме того, $\|x_1\|\geqslant 1$, $\|y_2\|\geqslant 1$, так что $\|1/n\|=2\,\|x_1\|\ \|y_2\|\geqslant 2$.

Для того, чтобы решить задачу в общем случае, достаточно доказать, что 2-адический модуль имеет продолжение на множество всех действительных чисел, т. е. существует функция $x\to\|x\|$, определенная на множестве всех действительных чисел, обладающая свойствами М1—М3 и совпадающая на множестве рациональных чисел с 2-адическим модулем. Такая функция действительно существует, но доказательство ее существования требует привлечения гораздо более сложных средств, чем те, которыми мы располагаем в этой статье.

2-адическое разложение

Как известно, любое натуральное число можно представить в виде суммы степеней числа 2. Например, $1000=2^3+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9$. Используя 2-адическое расстояние, это разложение можно получить так. Сначала мы ищем степень числа 2, которая находится на том же расстоянии от 0, что и число 1000. Найдя эту степень (2^3), вычитаем ее из числа 1000 и для получившегося числа (992) снова ищем степень числа 2, находящуюся с ним на одинаковом расстоянии от 0. Затем ищем степень числа 2, находящуюся на одинаковом расстоянии от 0 с числом $960=992-2^5$, и так далее.

Используя отрицательные степени числа 2, можно получить аналогичные разложения рациональных чисел вида $\frac{m}{2^k}$, где m, k — натуральные числа. Например,

$$\frac{1477}{256}=\frac{1+2^2+2^6+2^7+2^8+2^{10}}{2^8}=$$
$$=2^{-8}+2^{-6}+2^{-2}+2^{-1}+2^0+2^2.$$

Никакие другие рациональные числа нельзя представить в виде суммы степеней двойки, но, оказывается, такими суммами можно сколь угодно точно приблизить любое рациональное число. Действительно, пусть a — рациональное число и $\|a\|=\frac{1}{2^{k_1}}$. Положим $a_1=a-2^{k_1}$. Тогда a_1 ближе к нулю, чем a (см. упражнение 1).

Поэтому либо $a_1=0$, либо $\|a_1\|=\frac{1}{2^{k_2}}$, где $k_2>k_1$. Полагая $a_2=a_1-2^{k_2}$, мы снова получим, что либо $a_2=0$, либо $\|a_2\|=\frac{1}{2^{k_3}}$, где $k_3>k_2$, и так далее. Таким образом, либо некоторое число a_s равно нулю, и тогда a является суммой степеней двойки: $a=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}$, либо все a_s отличны от нуля, и тогда суммами вида $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}$ число a приближается сколь угодно точно. В этом случае удобно считать, что a равно бесконечной сумме $a=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}+\ldots$

Определение. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — последовательность рациональных чисел. Будем говорить, что рациональное число a равно бесконечной сумме $x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$, если 2-адическое расстояние между числом a и конечными суммами $S_n=x_1+\ldots+x_n$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то есть*

$$\lim_{n\to\infty}\rho(a,\ S_n)=0.$$

Упражнение 7. Докажите, что если $\|q\|<1$, то бесконечная сумма $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ определена и равна $\frac{a}{1-q}$.

Мы доказали, что всякое рациональное число можно представить либо в виде конечной суммы $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_n}$ $(k_1<k_2<\ldots<k_n)$, либо в виде бесконечной суммы $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_n}+\ldots$ (k_i — целые числа, $k_1<k_2<\ldots$). В обоих случаях это представление, которое мы будем называть *2-адическим разложением* числа a, можно записать в виде $\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots+\varepsilon_{k+n}2^{k+n}+\ldots$, где k — целое число, а каждое из чисел $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots, \varepsilon_{k+n}, \ldots$ равно 0 или 1, причем $\varepsilon_k=1$. Числа $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots$ называются *2-адическими цифрами* числа $\frac{p}{q}$. Нетрудно доказать, что каждое рациональное число имеет одно и только одно 2-адическое разложение.

Упражнение 8. Докажите, что $-1=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n+\ldots$,

$$\frac{1}{6}=2^{-1}+1+2^2+2^4+\ldots+2^{2n}+\ldots$$

В силу упражнения 8 2-адические цифры -1 образуют последовательность 1, 1, 1, ..., а 2-адические цифры числа $\frac{1}{6}$ образуют последовательность 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... Обе полученные последовательности периодичны. Можно показать, что у любого рационального числа $\frac{p}{q}$ последовательность 2-адических цифр периодична *).

Для этого рассмотрим последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, определяемых равенствами

$$\frac{p}{q}-\varepsilon_k 2^k=\frac{a_1}{q}2^{k+1},\ \frac{p}{q}-(\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1})=\frac{a_2}{q}2^{k+2},\ \ldots,$$
$$\frac{p}{q}-(\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots+\varepsilon_{k+n-1}\times 2^{k+n-1})=\frac{a_n}{q}2^{k+n},\ \ldots,$$

где $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_{k+n-1}, \ldots$ 2-адические цифры, числа $\frac{p}{q}$. (Проверьте, что $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — действительно целые числа.) Теперь заметим, что 2-адическое разложение числа $\frac{p}{q}$ можно получить из 2-адического разложения числа $\frac{a_n}{q}$, умножив каждое слагаемое в

*) В том же смысле, в котором периодична десятичная дробь, представляющая рациональное число: периодична, начиная с некоторого места.

последнем разложении на 2^{k+n} и приписав к получившейся сумме спереди

$$\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots+\varepsilon_{k+n-1}2^{k+n-1}.$$

Поэтому периодичность последовательности $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots$ будет установлена, если мы докажем, что в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ какое-нибудь число встречается дважды. В действительности, последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ограничена, и так как члены ее — целые числа, среди них обязательно встретятся равные. Ограниченность этой последовательности устанавливается следующей цепочкой неравенств:

$$|a_n|=\left|\frac{p}{2^{k+n}}-\left(\frac{\varepsilon_k}{2^n}+\frac{\varepsilon_{k+1}}{2^{n-1}}+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots+\frac{\varepsilon_{k+n-1}}{2}\right)q\right|\leqslant\left|\frac{p}{2^{k+n}}\right|+\left(\frac{1}{2^n}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2}\right)|q|\leqslant\frac{|p|}{2^k}+|q|.$$

Упражнение 9. Используя результат упражнения 7, докажите, что если $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots$ — периодическая последовательность цифр 0 и 1, то бесконечная сумма $\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\varepsilon_{k+2}2^{k+2}+\ldots$ является 2-адическим разложением некоторого рационального числа.

2-адические числа

Кроме периодических разложений, которые задают рациональные числа, можно рассматривать и непериодические разложения, считая, что они задают некоторые новые числа. Эти числа вместе с рациональными образуют множество Q_2, элементы которого называются *2-адическими числами*.

Элементы из Q_2 можно попарно складывать и перемножать. Вот как это делается. Пусть $\alpha=\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots$ Запишем α подобно бесконечной дроби: $\alpha=\varepsilon_k \ldots \varepsilon_0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$

Если есть два числа из Q_2, записанных таким образом, то их сумму (произведение) следует вычислять так же, как сумму (произведение) двух бесконечных дробей, но с переносами «слева направо». (Примеры см. на рисунке 4.) Мы не можем останавливаться на этом более подробно и предлагаем читателю самостоятельно проверить, что сумма и произведение элементов из Q_2 вновь дает элемент из Q_2 и что эти операции обладают обычными для умножения и сложения свойствами: удовлетворяют переместительному, сочетательному и распределительному законам.

2-адический модуль и расстояние естественно распространяются на Q_2:

$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ +\ 1\,011{,}0101\ldots\\ 101{,}1010\ldots\\ \hline 1\,110{,}0000\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110{,}11001\ldots\\ \times\ 0{,}01101\ldots\\ \hline 1{,}10110\ldots\\ 0{,}11011\ldots\\ 0{,}00110\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ \hline 1{,}001\ldots\ldots \end{array}$$

Рис. 4.

если $\alpha\in Q_2$ *и* $\alpha=\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots$ (где $\varepsilon_k\neq 0$), то $\|\alpha\|=1/2^k$; *если* $\alpha, \beta\in Q_2$, *то* $\rho(\alpha, \beta)=\|\alpha-\beta\|$.

Упражнения

10. По разложению $\alpha\in Q_2$ постройте разложение числа $-\alpha$.

11. Убедитесь, что обычная сумма двух рациональных чисел и сумма этих чисел в Q_2 соответствует одному и тому же числу. Продумайте аналогичный вопрос для произведения.

12. Научитесь делить в Q_2.

Вы знаете, что при определенных условиях для бесконечной последовательности (x_n) действительных чисел существует их сумма $\sum x_n$. Для этого необходимо, но недостаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Для 2-адических чисел дело обстоит проще. Условие $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$ является и необходимым и достаточным:

если $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$, *то существует*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Упражнения

13. Докажите достаточность условия $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$.

14. Докажите, что сумма $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!+\ldots$ определена, и найдите ее значение.

15. Докажите, что если $x\in Q_2$ и $\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$, то определена сумма $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

2-адический логарифм

В заключение мы придадим более естественную форму решению задачи М434*). Для этого рассмотрим функцию

$$L(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

определенную на множестве 2-адических чисел x, модуль которых не больше $\frac{1}{2}$ (см.

*) Условие и решение этой задачи см. в «Кванте» № 12 за 1977 год.

упражнение 15). Для решения задачи М434в достаточно доказать, что $L\ (2)=0$. Введем еще одну функцию по формуле $\log x = -L(1-x)$. *Равенство $L\ (2)=0$ означает*, что $\log(-1)=0$. Функция log (она называется *2-адическим логарифмом*) обладает основным свойством логарифмов: $\log(xy)=\log x+\log y$. Из этого свойства легко вывести равенство $\log(-1)=0$. Действительно, $\log 1=\log(1\times\times 1)=\log 1+\log 1=2\log 1$, откуда $\log 1=0$. С другой стороны, $\log 1=\log((-1)\times\times(-1))=\log(-1)+\log(-1)=2\log(-1)$ и потому $\log(-1)=0$. 2-адический логарифм в множестве 2-адических чисел играет ту же роль, что и обычный логарифм в множестве вещественных чисел. 2-адический логарифм определен для тех чисел x, для которых $\|x\|=1$, так как именно в этом случае $\|1-x\|\leqslant\frac{1}{2}$. (В частности, определен $\log(-1)$.) Равенство, на котором основано решение задачи М434 в «Кванте», в пределе при n, стремящемся к бесконечности, принимает вид $L\ (2x-x^2)-2L(x)=0$. Это равенство также является следствием основного свойства логарифма. Действительно, $L\ (2x-x^2)=-\log(1-2x+x^2)= =-\log(1-x)^2=-2\log(1-x)=2L\ (x)$.

С доказательством основного свойства 2-адического логарифма и с рядом других свойств 2-адических чисел вы можете познакомиться по книге З. И. Боревича и И. Р. Шафаревича «Теория чисел». Кроме логарифма есть и другие замечательные функции 2-адической переменной. Одной из таких функций является *экспонента* — функция, определенная равенством

$$\exp x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Упражнение 16. Докажите, что экспонента определена на множестве 2-адических чисел x, удовлетворяющих условию $\|x\|\leqslant\frac{1}{4}$.

2-адическая экспонента обладает свойствами, аналогичными свойствам обычной экспоненты: $\exp(x+y)=\exp x\cdot\exp y$, $\exp(\log x)=x$, $\log(\exp x)=x$. (Эти равенства справедливы для тех значений переменных, для которых они определены.)

* * *

Подобно тому, как было определено 2-адическое расстояние, с помощью произвольного простого числа p можно определить p-адическое расстояние. Оказывается, все расстояния между рациональными числами эквивалентны либо обычному, либо одному из p-адических расстояний. Но это — тема для другого рассказа.

Приложение

Нам осталось доказать существование треугольника с вершинами всех трех цветов. Сформулируем и докажем более общее утверждение:

Пусть квадрат OABC разбит на несколько треугольников. Предположим, что

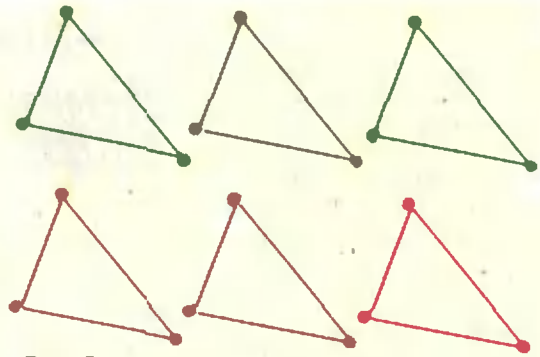


Рис. 5.

каждая вершина этих треугольников окрашена в зеленый, красный или синий цвет таким образом, что ни на какой прямой не встречаются точки всех трех цветов. Пусть при этом O — зеленая точка, A и B — красные точки, C — синяя точка. Тогда среди треугольников разбиения есть треугольник, имеющий вершины всех трех цветов.

Доказательство. Нам будет удобно различать стороны треугольников и звенья, т. е. отрезки, на которые сторона треугольника разбивается попавшими на нее вершинами других треугольников. Сторона треугольника разбиения, не содержащая внутри себя вершин других треугольников, сама считается звеном.

В зависимости от того, в какой цвет окрашены концы звена или стороны, мы будем различать 6 типов звеньев и 6 типов сторон: *ЗЗ* (оба конца зеленые), *ЗК* (*один из концов красный, другой* — зеленый) и т. д. (*ЗС*, *КК*, *КС*, *СС*). Докажем, что на сторонах треугольника, у которого какие-нибудь две вершины окрашены в один цвет, лежит четное число звеньев типа *ЗК*. Действительно, так как ни на какой прямой не встречаются точки всех трех цветов, звенья типа *ЗК* встречаются лишь на сторонах типов *ЗЗ*, *ЗК*, *КК*, причем на стороне типа *ЗЗ* или *КК* таких звеньев четное число, а на стороне типа *ЗК* — нечетное число. Отсюда следует, что на сторонах каждого из треугольников, изображенных на рисунке 5, четное число звеньев типа *ЗК* (на сторонах треугольников с двумя или тремя синими вершинами звеньев типа *ЗК* нет).

Предположим теперь, что среди треугольников разбиения нет такого, который имеет вершины всех трех цветов, т. е. в каждом треугольнике разбиения есть две вершины одного цвета. Так как каждое звено, находящееся на контуре квадрата *OABC*, лежит на стороне одного треугольника разбиения, а каждое звено, находящееся внутри этого квадрата, лежит на сторонах двух треугольников разбиения, то из того, что каждый треугольник разбиения имеет две вершины одного цвета, следует, что на контуре квадрата лежит четное число звеньев типа *ЗК*. С другой стороны, на отрезках *OC* и *BC* таких звеньев нет, на отрезке *OA* — нечетное число, а на отрезке *AB*—четное число таких звеньев. Получено противоречие.

задачник Кванта

Задачи

М546—М550; Ф558—Ф562

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента *основания журнала. Публикуемые в нем задачи не* стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 апреля 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М546, М547» или «Ф558». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М546. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры MP и MQ на две его противоположные стороны, и перпендикуляры MR и MT — на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагонали прямоугольника.

Ваге Шафарян, ученик 10 класса (Ереван)

М547. Для того чтобы уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, имело единственное решение в натуральных числах x, y, необходимо и достаточно, чтобы n было простым. Докажите это.

А. Данислян

М548. а) На окружности расположено 4 точки. Через середину хорды, соединяющей две из них, проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки. (Такая прямая проводится для каждой пары точек.) Докажите, что все шесть построенных прямых проходят через одну точку.

б) На окружности расположено 5 точек. Через центр тяжести трех из них (точку пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках) проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей остальные точки. Докажите, что все десять построенных прямых проходят через одну точку.

в) Обобщите эти утверждения на случай n точек.

А. Лопшиц

М549. Дано натуральное число N. Выпишем все его делители d_1, d_2, ..., d_n и для каждого из них найдем, сколько делителей оно имеет. Докажите, что для полученных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n выполняется равенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3.$$

Например, число $N=6$ имеет четыре делителя: 1, 2, 3, 6; здесь $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2$, $a_4=4$ и

$$(1+2+2+4)^2=1^3+2^3+2^3+4^3.$$

В. Матизен

М550. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно d км, должны добраться n велосипедистов, у которых имеется m велосипедов. Каждый может идти пешком со скоростью u км/ч или ехать на велосипеде со скоростью v км/ч. За какое наименьшее время все n велосипедистов смогут попасть из A в B? (Время считается по последнему прибывшему. Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.) Рассмотрите частный случай: $m=2$, $n=3$.

С. Кротов

Ф558. Маленький тяжелый шарик влетает через отверстие внутрь гладкой сферы той же массы, проходя на расстоянии $R/2$ от центра сферы (R — радиус сферы). После влета шарика отверстие автоматически закрывается. Считая соударения между шариком и сферой абсолютно упругими, найти траектории шарика и центра сферы в той системе отсчета, в которой сфера первоначально покоилась. Определить параметры этих траекторий и отметить на них точки, в которых происходят соударения.

Б. Буховцев

Ф559. Согласно теории Бете углеродный цикл звездных термоядерных реакций состоит из следующих реакций:

$$p+{}^{12}C \rightarrow {}^{13}N+\gamma,\quad {}^{13}N \rightarrow {}^{13}C+e^{+}+\nu,$$
$$p+{}^{13}C \rightarrow {}^{14}N+\gamma,\quad p+{}^{14}N \rightarrow {}^{15}O+\gamma,$$
$${}^{15}O \rightarrow {}^{15}N+e^{+}+\nu,\quad p+{}^{15}N \rightarrow {}^{12}C+{}^{4}He.$$

Найти энергию, выделяющуюся при образовании моля гелия.

Ф560. Плоская бесконечная струя толщины d_0 падает под углом α на плоскость (рис. 1). Скорость струи равна $\vec{v}$, ее плотность ρ. На какие струи распадается струя?

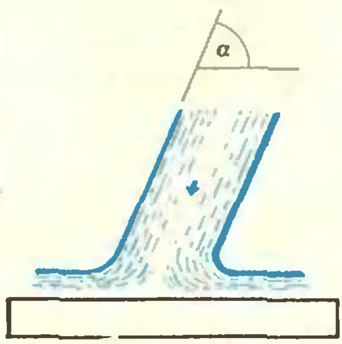


Рис. 1.

Ф561. Глубоководный батискаф сварен из двух полусфер радиуса $R=2$ м. Батискаф должен погружаться на глубину $H=10$ км. Какое напряжение (отношение модуля силы к длине экватора) должен выдерживать шов батискафа, если сварной экватор расположен а) горизонтально? б)* вертикально?

Ф562. Конденсаторы емкостей $C_1=2{,}00$ мкф и $C_2=3{,}00$ мкф соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=120$ В, средняя точка которой заземлена (рис. 2). Провод, соединяющий конденсаторы, может быть заземлен с помощью ключа K. Найти заряды q_1, q_2 и q_3, которые пройдут после замыкания ключа через сечения $I—I$, $II—II$ и $III—III$ в направлениях, указанных на рисунке.

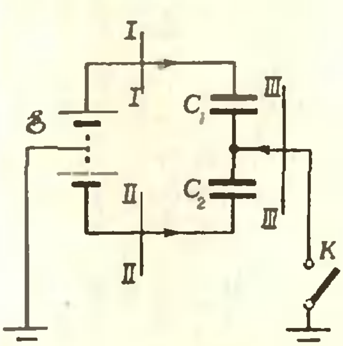


Рис. 2.

Решения задач

М500 (а — в) — М503; Ф502, Ф504, Ф512

М500. *N первоклассников выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «нале-ВО» все одновременно повернулись на 90°, некоторые — налево, а другие — направо. Ровно через секунду каждый, кто стал лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» — на 180°. Еще через секунду каждый, оказавшийся теперь лицом к лицу с соседом, снова поворачивается на 180° и т. д. (рис. 1).*

а) Докажите, что через конечное время движение прекратится.

б) Какое наибольшее число раз мог повернуться «кругом» один человек?

в) Какое наибольшее количество времени могло продолжаться движение в строю? *)

Мы решим задачи б) и в); задача а) следует из в) (или из б)).

б) Нетрудно видеть, что число поворотов, которые совершит первоклассник A, не может превосходить общего числа первоклассников m_A, стоящих к нему лицом (спереди и сзади). Действительно, в те моменты, когда A не поворачивается, m_A, очевидно, не меняется, а когда A поворачивается, m_A уменьшается на единицу. С другой стороны, очевидно, $m_A \leqslant N-1$. Итак, каждый первоклассник может повернуться *не более $N-1$ раз.* Простейшие примеры показывают, что эта оценка достигается (рис. 2).

в) Для времени движения справедлива та же оценка: $N-1$. Докажем это по индукции. При $N=1$, очевидно, оценка выполняется; пусть она выполняется при $N=k$. Рассмотрим самого правого (последнего) и второго справа (предпоследнего) первоклассников в строю из $N=k+1$ человек. Если последний первоклассник смотрит направо, то он, очевидно, поворачиваться не будет, и для времени движения, по предположению индукции, выполняется оценка $k-1$. Если последний первоклассник смотрит влево, а предпоследний — вправо, то в следующий момент оба они повернутся, последний первоклассник станет смотреть вправо, а для общего времени движения будет выполняться оценка $1+(k-1)=k=N-1$. Остается рас-

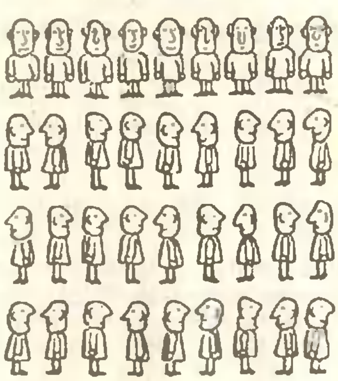


Рис. 1.

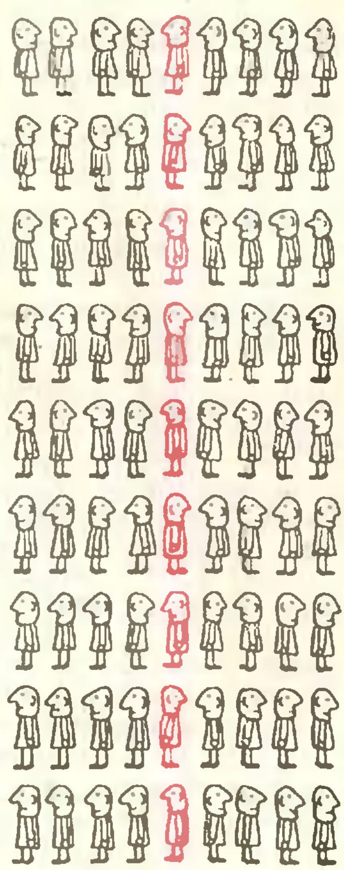


Рис. 2.

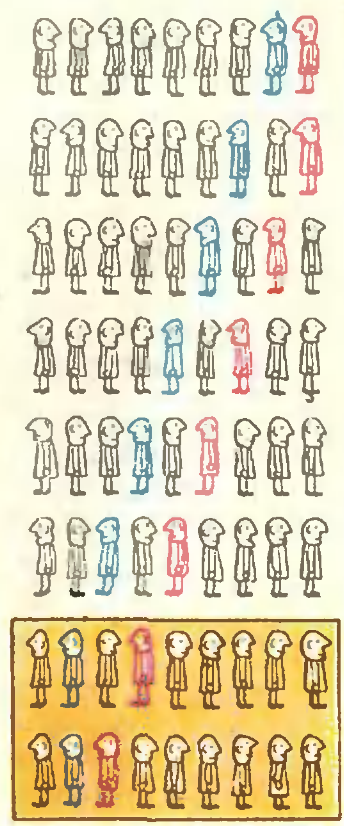
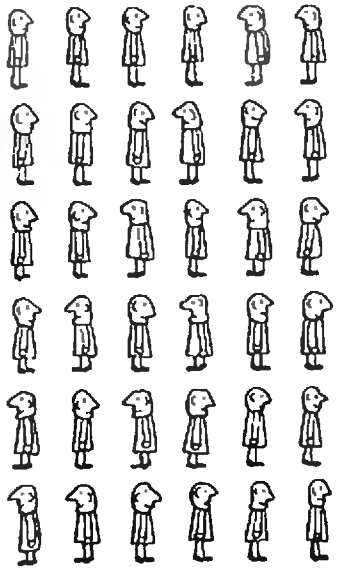


Рис. 3.

*) Задача М500 г) будет решена позже.



$N=6$
время движения - 5 секунд.

Рис. 4.

смотреть случай, когда оба: — последний и предпоследний — первоклассника смотрят влево.

Будем теперь считать, что первоклассники, стоящие друг к другу лицом, *не поворачиваются, а меняются местами* (каждый из них делает шаг вперед); картина от этого не изменится. Тогда нетрудно видеть (рис. 3), что:

1) наличие последнего первоклассника никак не будет сказываться на движении предпоследнего;

2) последний первоклассник может отстать от предпоследнего не более чем на два шага (между ними может стоять не более одного человека).

Из этого следует, что последний (смотрящий влево) первоклассник остановится не более чем через одну секунду после того, как окончательно прекратит движение предпоследний первоклассник (также смотрящий влево); а с остановкой последнего первоклассника движение в строю вообще прекращается (действительно, у него за спиной — только «правые», а перед ним — только «левые»). При этом движение в строю из $N=k+1$ человек будет продолжаться не более чем на одну секунду больше, чем в строю из k человек, то есть не более чем $1+(k-1)=k=N-1$ секунд. Таким образом, оценка $N-1$ выполняется. Из рисунка 4 видно, что она является точной (на рисунке $N=6$, время движения — пять секунд).

Г. Курдюмов

◆

М501. *Выберем из последовательности степеней тройки 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, ... все числа, начинающиеся с цифры 9; пусть эти числа (по порядку) $3^{f(1)}$, $3^{f(2)}$, $3^{f(3)}$, ... (в частности, $f(1)=2$, так как первое из таких чисел $3^2=9$).*

а) Найдите $f(2)$ и $f(3)$ — номера второго и третьего такого числа.

б) Докажите, что таких чисел бесконечно много.

в) Докажите, что $f(n)$ при $n>1$ удовлетворяет условиям:

(1) $f(n)-n$ *нечетно*;

(2) $\left|f(n)-\dfrac{n\lg 9}{1-\lg 9}\right|<1$,

и определяется этими условиями однозначно.

Докажем сначала такое утверждение: *для любого $k>1$ существуют две или три k-значные степени тройки, причем в том и только в том случае, когда их три, одна из них начинается цифрой 9* (если последовательность степеней тройки дополнить числом $3^0=1$, то это утверждение будет верно и при $k=1$). Пусть 3^m — н а и м е н ь ш а я k-значная степень тройки; тогда $10^{k-1}\leqslant 3^m<3\cdot 10^{k-1}$. Отсюда $3\cdot 10^{k-1}\leqslant 3^{m+1}<9\cdot 10^{k-1}$, то есть 3^{m+1} — k-значное число, не начинающееся с девятки. Далее, $3^{m+2}\geqslant 9\cdot 10^{k-2}$, то есть если 3^{m+2} — k-значное число, то оно обязательно начинается цифрой 9. (В любом случае $3^{m+3}\geqslant 27\cdot 10^{k-1}$ — не k-значное число.)

Пусть теперь $3^{f(n)}$ — k-значная степень тройки, начинающаяся с девятки, то есть

$$9\cdot 10^{k-1}<3^{f(n)}<10^k \qquad (*)$$

(оба неравенства строгие, поскольку $3^{f(n)}$ — число нечетное). Подсчитаем двумя способами количество степеней тройки, меньших $3^{f(n)}$. С одной стороны, кроме тех $n-1$ степеней, которые начинаются цифрой 9, есть еще ровно две l-значные степени тройки для каждого $l=1,2,\ldots,k$, то есть их всего $2k+(n-1)$ штук. С другой стороны, количество степеней тройки, меньших $3^{f(n)}$, равно $f(n)$: это числа $3^0, 3^1, \ldots, 3^{f(n)-1}$. Значит, $2k+(n-1)=f(n)$, откуда

$$k=\frac{f(n)-n+1}{2}. \qquad (**)$$

Поскольку k — натуральное, из этого следует, что $f(n)-n$ — нечетное число. Условие (1) пункта в) доказано.

Из $(*)$ и $(**)$ имеем

$$9\cdot 10^{\frac{f(n)-n-1}{2}}<3^{f(n)}<10^{\frac{f(n)-n+1}{2}}, \qquad (***)$$

или

$$\lg 9+\frac{f(n)-n-1}{2}<f(n)\lg 3<\frac{f(n)-n+1}{2}.$$

Выполнив несколько равносильных преобразований, получим

$$2\lg 9+f(n)-n-1<f(n)\lg 9<f(n)-n+1,$$
$$\lg 9-1<f(n)\lg 9-f(n)-\lg 9+n<-\lg 9+1,$$

то есть

$$-(1-\lg 9)<-(1-\lg 9)f(n)+(n-\lg 9)<1-\lg 9,$$

и поскольку $1-\lg 9>0$, имеем

$$-1<-f(n)+\frac{n-\lg 9}{1-\lg 9}<1,$$

то есть
$$\left|f(n)-\frac{n-\lg 9}{1-\lg 9}\right|<1$$

— условие (2) пункта в) задачи.

Число $\dfrac{n-\lg 9}{1-\lg 9}=\dfrac{n-1}{1-\lg 9}+1$ иррациональное ($n>1$ и $\lg 9$ иррационально). Поэтому при любом $n>1$ условию (2) удовлетворяют ровно два последовательных натуральных числа; одно из них четно, другое нечетно. Но так как для каждого n четность $f(n)$ известна (разность $f(n)-n$ нечетна), то при каждом n число $f(n)$ определяется однозначно. Остается доказать, что для $f(n)$, определенного условиями (1) и (2), степень тройки $3^{f(n)}$ действительно начинается с цифры 9 (все условия на $f(n)$ мы получили в предположении, что $f(n)$ существует). Проведя выполненные выше преобразования в обратном порядке, из условия (2) легко получим (***), то есть $3^{f(n)}$ в самом деле начинается с девятки.

Теперь уже нетрудно найти $f(2)$ и $f(3)$:

$$f(2)=23,\ f(3)=44.$$

Наконец, поскольку $f(n)$ определено для всех натуральных n, получаем, что степеней тройки, начинающихся цифрой 9, бесконечно много.

Замечание. Из неравенства (2) в условии задачи следует, что величина $f(n)$ растет примерно как $\dfrac{1}{1-\lg 9}n$. Этот результат можно вывести из того факта, что при больших значениях N среди N первых степеней тройки количество степеней, начинающихся цифрой 9, примерно равно $(1-\lg 9)N$ (рис. 5; тут совершенно неважно, рассматриваем ли мы степени двойки, тройки или другого числа α с иррациональным $\lg\alpha$; см. статью В. Болтянского — «Квант», 1978, № 5). В самом деле, если $f(n)=N$, то среди чисел $3^1, 3^2, \dots, 3^N$ ровно $n\approx(1-\lg 9)N$ начинаются с 9; поэтому $f(n)\approx\dfrac{1}{1-\lg 9}n$. Результат задачи M501 позволяет найти точное значение $f(n)$ для любого n.

Э. Туркевич

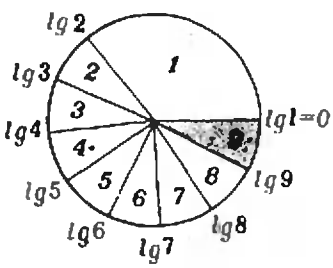


Рис. 5. Круг разбит на девять секторов: 1, 2, ..., 9, показывающих, какую долю (в пределе при $N\to\infty$) среди чисел $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ составляют те, которые начинаются цифрой 1, 2,...,9 соответственно.

◆

M502. *Даны три параллельных отрезка AA_1, BB_1, CC_1, не лежащих в одной плоскости. Пусть M — точка пересечения плоскостей ABC_1, BCA_1 и CAB_1, а M_1 — точка пересечения плоскостей A_1B_1C, B_1C_1A и C_1A_1B. Докажите, что отрезок MM_1 параллелен трем первоначальным.*

Пусть A_0, B_0, C_0 — проекции данных отрезков на перпендикулярную им плоскость (рис. 6). Заметим, что линия пересечения плоскостей ABC_1 и CAB_1 проходит через точку A и точку пересечения прямых BC_1 и B_1C (рис. 7), а ее проекция проходит через точку A_0 и делит отрезок B_0C_0 в отношении $|BB_1|:|CC_1|$. Линия пересечения плоскостей BCA_1 и ABC_1 проходит через точку B и точку пересечения прямых AC_1 и A_1C (рис. 7), так что ее проекция проходит через точку B_0 и делит отрезок A_0C_0 в отношении $|AA_1|:|CC_1|$ (рис. 6). Остается заметить, что те же факты имеют место и для проекций линий пересечения пар плоскостей (A_1B_1C, C_1A_1B) и (B_1C_1A, A_1B_1C), так что точки M и M_1 пересечения трое к плоскостей проектируются в одну и ту же точку M_0 плоскости $A_0B_0C_0$, перпендикулярной $[AA_1]$. Отсюда следует утверждение задачи.

А. Савин, З. Скопец

Другое решение этой задачи получается с использованием понятия косой симметрии. *Косой симметрией* на плоскости называется следующее преобразование: нужно

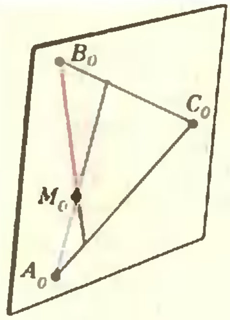


Рис. 6.

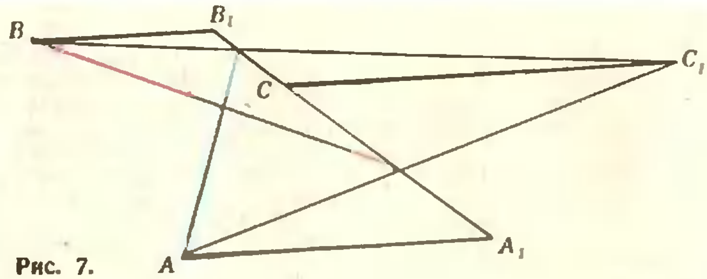


Рис. 7.

взять прямую — ось симметрии — и некоторое не параллельное ей направление. Затем через произвольную точку K провести прямую, параллельную выбранному направлению, и найти на ней такую точку K_1, что отрезок KK_1 делится осью пополам. Точка K_1 и называется *кососимметричной* точке K. Аналогично и в пространстве, но там вместо оси нужно взять плоскость симметрии (и не параллельное ей направление). Легко проверить, что при косой симметрии прямые переходят в прямые, плоскости — в плоскости.

Решение задачи. Проведем через середины наших параллельных отрезков плоскость симметрии. Рассмотрим косую симметрию относительно этой плоскости с направлением, параллельным нашим отрезкам. Тогда тройка плоскостей ABC_1, BCA_1, CAB_1 переходит во вторую тройку плоскостей: A_1B_1C, B_1C_1A и C_1A_1B. Следовательно, точка пересечения первой тройки плоскостей перейдет в точку пересечения второй тройки плоскостей; поэтому соединяющий их отрезок параллелен данным (если две точки кососимметричны, то соединяющий их отрезок имеет выбранное направление).

Л. Лиманов

◆

М503. *Набор из $2n+1$ чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ таков, что $a_k \geqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для всех $k=1, 2, \ldots, 2n-1$. Докажите неравенство*

$$\frac{a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1}}{n} \geqslant \frac{a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}{n+1} \qquad (*)$$

и выясните, для каких наборов оно превращается в равенство.

Заметим сначала, что если данный набор — арифметическая прогрессия, то все написанные в условии задачи неравенства превращаются в равенства. Ниже мы увидим, что из «выпуклых» наборов (то есть наборов, у которых $a_k \geqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для всех $k=1,2, \ldots, 2n-1$) только для арифметической прогрессии неравенство (*) становится равенством.

Числа произвольного «выпуклого» набора $\{a_k\}$ представим в виде суммы чисел $a_k=b_k+c_k$ двух наборов $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$, один из которых — $\{b_k\}$ — арифметическая прогрессия с крайними членами $b_0=a_0$ и $b_{2n}=a_{2n}$, а другой — $\{c_k\}$ — «выпуклый» набор с нулевыми крайними членами: $c_0=c_{2n}=0$.

Поскольку для набора $\{b_k\}$ неравенство (*) превращается в равенство, достаточно доказать его для набора $\{c_k\}$. Но для «выпуклых» наборов с нулевыми крайними членами оно получается непосредственно из условия «выпуклости»: записав, что $c_{2i-1} \geqslant \frac{c_{2i-2}+c_{2i}}{2}$ для всех $i=1, \ldots, n$, и сложив эти неравенства, получим:

$$c_1+c_3+\ldots+c_{2n-1} \geqslant \frac{c_0}{2}+c_2+c_4+\ldots+c_{2n-2}+\frac{c_{2n}}{2}=c_0+c_2+\ldots+c_{2n-2}+c_{2n}$$

(мы учли, что $c_0=c_{2n}=0$), так что

$$\frac{c_1+c_3+\ldots+c_{2n-1}}{n} \geqslant \frac{c_0+c_2+\ldots+c_{2n}}{n} \geqslant \frac{c_0+c_2+\ldots+c_{2n}}{n+1}. \qquad (**)$$

Осталось лишь доказать, что для выпуклых наборов неравенство (*) может быть равенством только для арифметической прогрессии. Для этого достаточно показать, что если $c_k \geqslant (c_{k-1}+c_{k+1})/2$, то либо все c_k, $k=0, \ldots, 2n$, равны нулю, либо все c_k, $k=1, \ldots, 2n-1$, положительны (в последнем случае правое неравенство в (**) обязательно строгое).

Выберем наименьшее c_i; пусть оно стоит не с краю: $i \neq 0$, $i \neq 2n$. Тогда $c_i \leqslant c_{i-1}$ и $c_i \leqslant c_{i+1}$, откуда $c_i \leqslant \frac{c_{i-1}+c_{i+1}}{2}$. Но по условию $\{c_k\}$—«выпуклый» набор, значит, $c_i=c_{i-1}=c_{i+1}$. Применив то же рассуждение к c_{i-1} (или к c_{i+1}), получим, что $c_{i-2}=c_{i-1}=c_i$ (или $c_i=c_{i+1}=c_{i+2}$) и т. д.— до тех пор, пока не дойдем до краев; получим $0=c_1=c_2=\ldots=c_{2n-1}=0$. Поэтому если среди чисел c_k есть отличные от нуля, то наименьшее обязательно стоит с краю (и равно нулю), так что для $k=1, \ldots, 2n-1$ имеем $c_k>0$.

Н. Васильев, И. Клумова

◆

Ф502. *В крышке закрытого ящика высоты $h=1$ м имеется круглое отверстие. Как изменится освещенность дна под отверстием, если в отверстие вставить линзу с оптической силой $D=1$ дптр? Ящик стоит под открытым небом, затянутым равномерной пеленой облаков.*

Световой поток, идущий в единичном телесном угле, под любым направлением один и тот же. Обозначим через σ световой поток, идущий в единичном телесном угле и попадающий на единичную площадку линзы или дна под отверстием.

В отсутствие линзы на дно попадают лучи, идущие в телесном угле $\Omega = S_{\text{отв}}/h^2$ (рис. 8). Следовательно, в этом случае освещенность дна под отверстием равна

$$E_1 = \sigma\Omega = \sigma S_{\text{отв}}/h^2$$

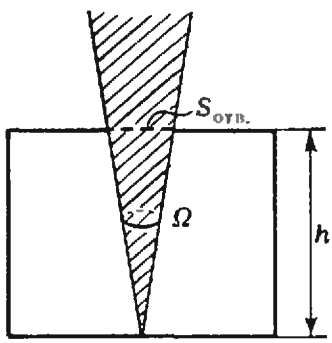


Рис. 8.

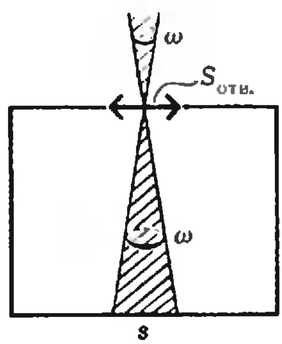


Рис. 9.

Линза собирает в своей фокальной плоскости на дне ящика на площадке площадью $s=h^2\omega$ все лучи, идущие в телесном угле ω (рис. 9). Такие лучи несут световой поток $\Phi=\sigma S_{\text{отв}}\omega$, так что освещенность изображения неба в этом случае равна

$$E_2 = \Phi/s = \sigma S_{\text{отв}}/h^2.$$

Мы видим, что $E_1=E_2$, то есть освещенность дна ящика под отверстием не меняется.

И. Слободецкий

◆

Ф504. *Колеса легковых автомобилей тщательно балансируют — добиваются того, чтобы центр масс колеса лежал точно на оси его вращения. Для чего необходима балансировка колес?*

На колесо со стороны дороги действует сила реакции $\vec{N}$. Если колесо сбалансировано, эта сила равна по абсолютной величине 1/4 веса автомобиля $M|\vec{g}|$[*] (при езде по глад-

[*] То, какая часть веса автомобиля приходится на колесо, определяется положением центра тяжести автомобиля. Вообще говоря, она не равна 1/4

кой горизонтальной дороге). Если же колесо не сбалансировано, то его центр тяжести движется по окружности радиуса r с центростремительным ускорением $\omega^2 r$ (r — расстояние между центром колеса и центром тяжести, ω — угловая скорость вращения колеса). Поэтому в тот момент, когда центр тяжести находится в самой нижней точке, значение $|\vec{N}|$ больше значения $\frac{1}{4}M|\vec{g}|$ на величину $m\omega^2 r$ (m — масса колеса). Когда же центр тяжести находится в самой верхней точке, значение $|\vec{N}|$ меньше $\frac{1}{4}M|\vec{g}|$ на такую же величину. При проскальзывании колеса относительно дороги (проскальзывание всегда имеет место) сила трения между колесом и дорогой по этим причинам оказывается переменной. Поэтому в некоторых местах шина изнашивается быстрее, чем если бы колесо было сбалансировано. А это приводит к необходимости чаще менять покрышки.

С. Семенчинский

◆

Ф512. *Цепь, показанная на рисунке 10, включена в сеть переменного тока частоты $\nu = 50$ Гц. С помощью коммутатора на вход осциллографа подается попеременно то напряжение между точками a и b, то напряжение между точками b и d. На экране осциллографа получаются изображения двух кривых. Рисунок 11 сделан с фотографии картины на экране осциллографа. Определить индуктивность L контура, если $C = 32$ мкФ, $R = 65$ Ом.*

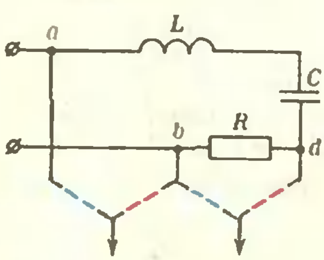


Рис. 10.

Как известно, в цепи переменного тока напряжение и ток не совпадают по фазе. Для определения разности фаз φ между током и напряжением воспользуемся рисунком 10. Поскольку на участке bd имеется только активное сопротивление, ток и напряжение на этом участке совпадают по фазе. Следовательно, нам достаточно найти сдвиг фаз между напряжениями на участках ab и bd.

Пусть, для определенности, ток в цепи (а значит, и напряжение между точками b и d) отстает от приложенного напряжения — на рисунке 11 красная кривая сдвинута вправо относительно синей кривой на длину отрезка BD. Измерив длины отрезков AD (этому отрезку соответствует сдвиг фаз 180°) и BD, найдем

$$\varphi = \frac{|BD|}{|AD|}\, 180^\circ = \frac{1}{4}\, 180^\circ = 45^\circ.$$

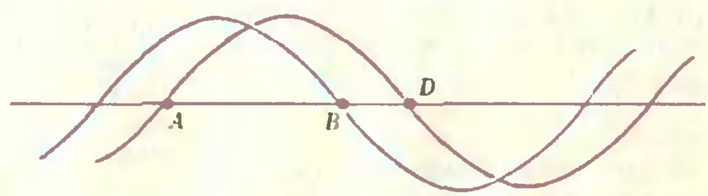


Рис. 11.

С другой стороны, разность фаз φ связана с параметрами электрической цепи. Построим векторную диаграмму токов и напряжений для данного последовательного контура (рис. 12). Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

и

$$L = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega C} + R\operatorname{tg}\varphi\right) = \frac{1}{2\pi\nu}\left(\frac{1}{2\pi\nu C} + R\operatorname{tg}\varphi\right) \approx 0{,}5\ \text{Г}.$$

В. Нижник

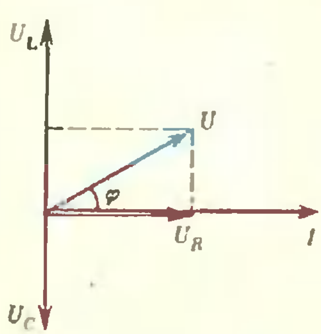


Рис. 12.

М. Чернявский

Задачи на геометрический смысл производной

В § 10 учебника «Алгебра и начала анализа 9» приводится уравнение касательной к графику дифференцируемой функции и *объясняется* геометрический смысл производной *). Задачи, разобранные в данной заметке, иллюстрируют возможность исследования геометрических фактов аналитическим методом.

Из курса физики нам известно, что отражателю прожектора обычно придают форму параболоида вращения. Это объясняется свойством параболы, рассматриваемым в следующей задаче:

З а д а ч а 1. *Доказать, что лучи света, исходящие из фокуса $F(0, {}^1/_4a)$ параболы $y=ax^2$, в любой ее точке отражаются параллельно ее оси симметрии **).*

Р е ш е н и е. Пусть $M\left(x_0; ax_0^2\right)$ — произвольная точка параболы (рис. 1). Из закона отражения света вытекает, что величины углов, образуемых с касательной MP падающим лучом FM и отраженным лучом MA, равны между собой. (На рисунке 1: $\hat{1}=\hat{2}$). Нам нужно доказать, что $MA \parallel Oy$, что равносильно равенству $\hat{2}=\hat{3}$ или, с учетом предыдущего, равенству $\hat{1}=\hat{3}$. Последнее же вытекает из равнобедренности треугольника PFM. Итак, достаточно доказать, что $|FM|=|FP|$.

$$|FM|=\sqrt{x_0^2+\left(ax_0^2-\frac{1}{4a}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2x_0^4+\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{16a^2}}=\left|ax_0^2+\frac{1}{4a}\right|.$$

Для вычисления $|FP|$ запишем уравнение касательной MP. Так как $y'=2ax$, это уравнение имеет вид $y-ax_0^2=2ax_0(x-x_0)$. Полагая в нем $x=0$, найдем ординату точки P: $y=-ax_0^2$. Следовательно, $|FP|=$ $=\left|\frac{1}{4a}-\left(-ax_0^2\right)\right|=\left|ax_0^2+\frac{1}{4a}\right|=$ $=|FM|$.

* * *

Легко решаются задачи, в которых требуется найти угловой коэффициент касательной или уравнение касательной к графику заданной функции, если известна точка касания. Впрочем, в прикладных задачах эту функцию иногда бывает необходимо найти из некоторых дополнительных условий. С таким случаем мы встретимся в следующей задаче:

З а д а ч а 2. *Профиль автомобильного моста имеет форму параболы (рис. 2) с осью, проходящей вертикально через середину моста с высотой центральной части 10 м и длиной основания 120 м. Какой должен быть наклон насыпи на обоих концах моста?*

Р е ш е н и е. Заметим, что наклон насыпи — это наклон отрезков каса-

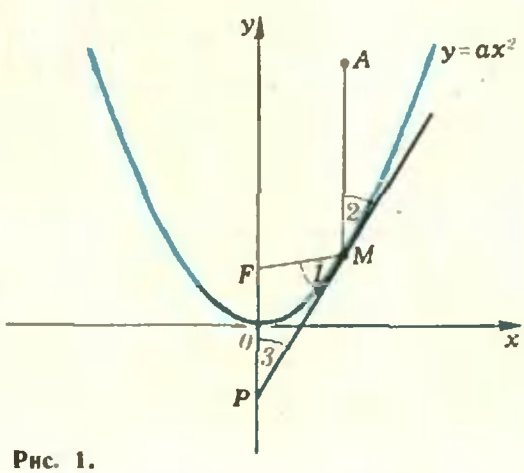


Рис. 1.

*) Более подробно об этом см. «Квант», 1977, № 2, с. 35.

**) См. также «Квант», № 4, с. 9.

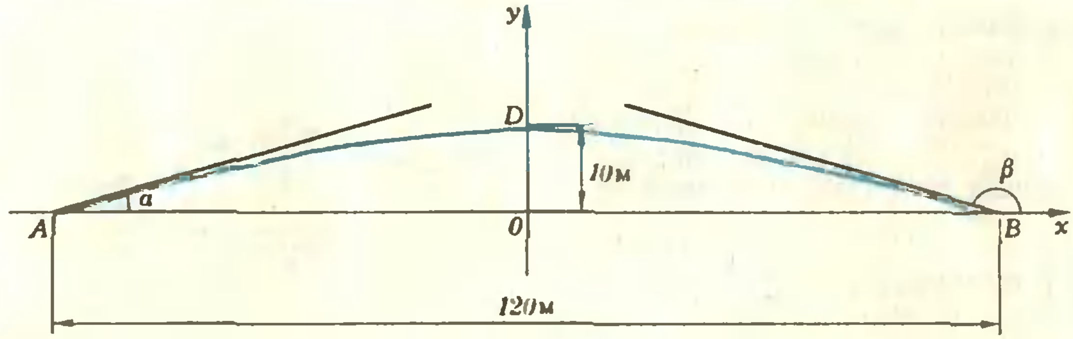


Рис. 2.

тельных к параболе в точках A и B. Выберем систему координат так, как указано на рисунке 2. Тогда парабола в этой системе задается уравнением вида $y = ax^2+10$. Так как точка $A(60; 0)$ лежит на параболе, $a = -\frac{1}{360}$. Таким образом, уравнение параболы $y = -\frac{x^2}{360} + 10$. Отсюда $y' = -\frac{x}{180}$.

В точке A: $\operatorname{tg}\alpha = y'(-60) = \frac{1}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

В точке B: $\operatorname{tg}\beta = y'(60) = -\frac{1}{3}$, $\beta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

* * *

Иногда нужно проверить, касается ли данная прямая графика заданной функции. Для этого достаточно проверить следующие два условия, которые являются необходимыми, а в совокупности и достаточными для касания:

1. Прямая и график функции имеют общую точку.
2. В общей точке значение производной данной функции равно угловому коэффициенту данной прямой.

З а д а ч а 3. *Касается ли прямая* $x + 4y - 4 = 0$ *гиперболы* $y = \frac{1}{x}$?

Р е ш е н и е. Решив систему

$$\begin{cases} x + 4y - 4 = 0, \\ xy = 1, \end{cases}$$

находим общую точку прямой и гиперболы $(2;\ 1/2)$. Производная функции $y = \frac{1}{x}$ равна $y' = -\frac{1}{x^2}$, а ее значение в точке пересечения — $y'(2) = -\frac{1}{4}$. Но угловой коэффициент прямой такой же. Значит, данная прямая касается гиперболы в точке $(2;\ 1/2)$.

З а д а ч а 4. *Найти величину угла, под которым парабола* $y = x^2$ *видна из точки* $A\ (2; -1)$.

Р е ш е н и е. Очевидно, этот угол образован двумя касательными к параболе, проходящими через точку A (рис. 3). Обозначим искомый угол через α, а углы наклона касательных к оси Ox через α_1 и α_2. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (1)$$

где k_1 и k_2 обозначают угловые коэф-

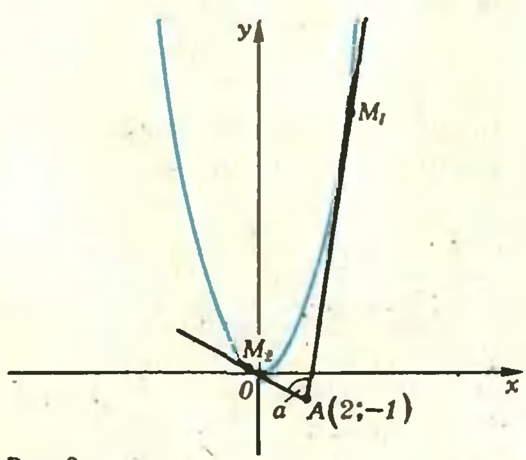


Рис. 3.

фициенты касательных*). Для их вычисления нужно знать абсциссы точек касания.

Обозначим точку касания через $M(x_0; x_0^2)$. Для вычисления x_0 запишем уравнение касательной

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$$

и воспользуемся тем, что точка $A(2; -1)$ удовлетворяет этому уравнению, то есть

$$-1-x_0^2=2x_0(2-x_0),$$

откуда

$$x_0=2\pm\sqrt{5}.$$

Таким образом, $k_1=y'(2+\sqrt{5})=4+2\sqrt{5}$; $k_2=y'(2-\sqrt{5})=4-2\sqrt{5}$. Согласно (1), $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4-2\sqrt{5}-(4+2\sqrt{5})}{1+(4-2\sqrt{5})(4+2\sqrt{5})}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$,

то есть

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\sqrt{5}.$$

Задача 5. *Вертикальный разрез теплицы имеет форму пятиугольника $ABCDE$ (рис. 4), в котором $|AE|=8$ м, $|AB|=|DE|=1$ м. Из точки P, расположенной на высоте 2 м в плоскости POE горизонтально вытекает струя воды, которая при максимальном напоре достигает точки E (или A). Какую высоту h нужно придать центральной части теплицы, если требуется, чтобы струя воды (она имеет форму параболы с вершиной в точке P) не задевала крыши теплицы?*

Решение. Выберем систему координат так, как указано на рисунке 4, и найдем уравнение параболы. Оно должно иметь вид $y=2+ax^2$. Так как точка $E(4; 0)$ лежит на параболе, $a=-\frac{1}{8}$. Таким образом, парабола определяется уравнением $y=2-\frac{x^2}{8}$. Поскольку точка $D(4; 1)$

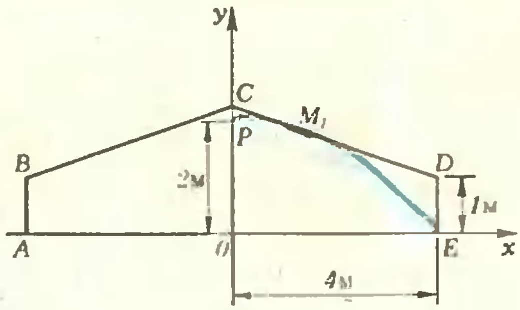


Рис. 4.

фиксирована, то нам надо найти такое положение точки $C(0; y_C)$, при котором прямая (CD) касается параболы $y=2-\frac{x^2}{8}$, а затем взять $h>y_C$.

Обозначим точку касания через $M\left(x_0; 2-\frac{x_0^2}{8}\right)$ и запишем уравнение касательной

$$y-\left(2-\frac{x_0^2}{8}\right)=-\frac{x_0}{4}(x-x_0).$$

Подставляя координаты точки $D(4; 1)$ в это уравнение, получим

$$x_0^2-8x_0+8=0,$$

т. е. $x_0=4\pm2\sqrt{2}$. Условию задачи удовлетворяет лишь корень $x_0=4-2\sqrt{2}$, так как второй корень соответствует точке касания, лежащей вне рассматриваемого участка параболы. Подставив полученное значение x_0 в уравнение касательной и положив в нем $x=0$, получим ординату точки C:

$$y_C=2-\frac{x_0^2}{8}+\frac{x_0^2}{4}=2+\frac{x_0^2}{8}=$$

$$=2+\frac{(4-2\sqrt{2})^2}{8}=5-2\sqrt{2}.$$

Таким образом, достаточно взять $h>5-2\sqrt{2}\approx2.2$ (м).

* * *

В некоторых задачах мы встречаемся с касающимися между собой кривыми. Естественно считать, что *кривые касаются друг друга* в некоторой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. Для того чтобы графики функций f и φ касались в

*) Формула (1), выражающая тангенс угла между прямыми через угловые коэффициенты этих прямых, заслуживает осознания, отдельного от данной задачи, — она часто бывает полезна.

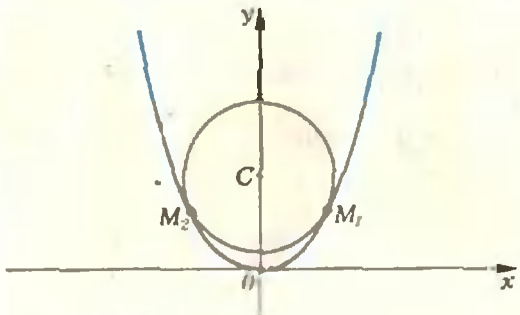


Рис. 5.

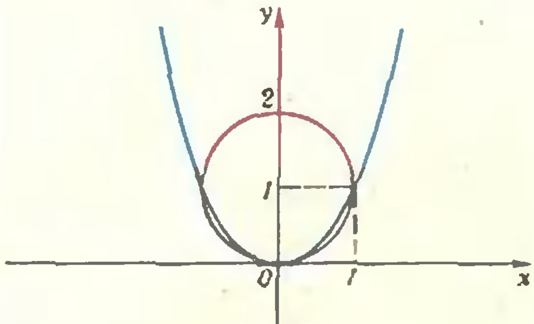


Рис. 6.

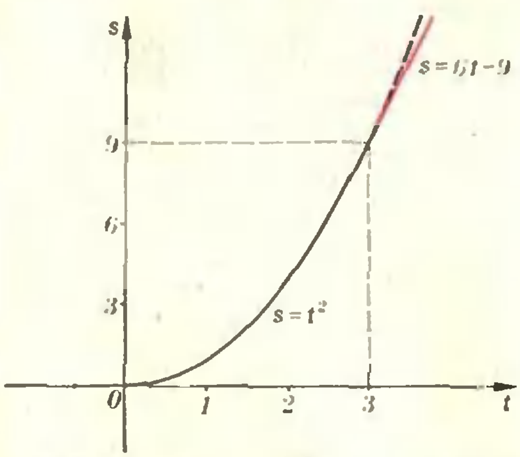


Рис. 7.

точке с абсциссой x_0, необходимо и достаточно (ср. с условиями, сформулированными перед задачей 3), чтобы выполнялись следующие два условия:

1) $f(x_0) = \varphi(x_0)$;
2) $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$.

З а д а ч а 6. *Окружность радиуса 1 с центром на положительной полуоси Oy касается параболы $y=x^2$. Найти точку касания M и положение центра окружности C.*

Р е ш е н и е. Обозначим центр окружности через $C(0; a)$. Тогда уравнение окружности будет иметь вид $x^2+(y-a)^2=1$.

Нас интересует касание параболы с нижней полуокружностью (рис. 5, 6) уравнение которой имеет вид $y=a-\sqrt{1-x^2}$. Обозначим абсциссу точки касания через x_0. Используя условия 1), 2), получаем

$$\begin{cases} a-\sqrt{1-x_0^2}=x_0^2, \\ \dfrac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}=2x_0, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} \sqrt{1-x_0^2}=a-x_0^2, \\ x_0\left(1-2\sqrt{1-x_0^2}\right)=0. \end{cases}$$

Одно решение, очевидно, $x_0=0$, $a=1$ (рис. 6). Второе уравнение имеет еще два корня $x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Им соответствует одно и то же значение $a=\frac{5}{4}$. Таким образом, мы получаем более интересный случай: окружность с центром в точке $C\left(0; \frac{5}{4}\right)$, касающуюся параболы в точках $M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$ и $M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$ (рис. 5).

* *
*

З а д а ч а 7. *Точка движется прямолинейно под действием постоянной силы с ускорением 2 м/с² и с нулевой начальной скоростью. Через 3 секунды после начала движения сила прекращает действовать, и точка начинает двигаться равномерно с набранной скоростью. Найдите закон движения точки и постройте график движения.*

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы в начальный момент точка находилась в начале координат: $s=0$ при $t=0$. Тогда при $0\leqslant t\leqslant 3$ имеем $s=t^2$. При $t\geqslant 3$ график движения — часть касательной к параболе $s=t^2$, проведенной в точке (3, 9) в сторону возрастания t (рис. 7). Поэтому его уравнение имеет вид

$$s-9=6(t-3)$$

или

$$s=6t-9.$$

Таким образом, закон движения определяется функцией

$$s=\begin{cases} t^2, \text{ если } 0\leqslant t\leqslant 3; \\ 6t-9, \text{ если } t\geqslant 3. \end{cases}$$

Упражнения

1. Число $x=1$ не является корнем уравнения $x^3-x=2x-\frac{x^2}{2}$, но является корнем уравнения, полученного приравниванием производных его левой и правой части. Объясните геометрический смысл указанного факта.

2. Постройте графики каких-нибудь функций f и φ в интервале $]a;\ b[$ так, чтобы при всех x из этого интервала выполнялись условия:

а) $f(x)>\varphi(x)$ и $f'(x)=\varphi'(x)$;

б) $f(x)>\varphi(x)$ и $f'(x)<\varphi'(x)$.

3. При каком значении a кривые $y=x^3-x+1$ и $y=3x^2-4x+a$ касаются друг друга?

4. Парабола, конгруэнтная неподвижной параболе $y=x^2$, движется так, что ось Ox все время остается ее осью симметрии. В каких точках подвижная парабола косиется неподвижной и где будет при этом ее вершина?

5. Парабола (с вершиной в точке $A(-2,\ 0)$), ось симметрии которой совпадает с осью Ox, касается окружности $x^2+y^2=1$. Найти уравнение параболы.

6. В плоскости xOy найти уравнение кривой, из любой точки которой парабола $y=x^2$ видна под углом в 45°.

7. Ракета движется прямолинейно по закону $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Через время t_1 после начала движения от нее отделяется некоторый предмет, который продолжает двигаться по инерции. В какой момент времени и какую постоянную скорость надо придать указанному предмету для того, чтобы, двигаясь дальше равномерно, он догнал ракету в момент t_2, имея при этом одинаковую с ней скорость? Приведите геометрическую интерпретацию задачи.

8. Космическая ракета запускается по прямой из некоторой точки пространства, в которой можно пренебречь силами тяготения других тел. Закон движения ракеты $s=\frac{at^2}{2}$, $t\geqslant 0$. Через сколько времени, считая от начала движения, надо отключить двигатели, чтобы ракета, двигаясь дальше по инерции с набранной скоростью, оказалась в момент t_1 на расстоянии s_1 от первоначальной точки? Какова геометрическая модель данной задачи?

Числовые ребусы наших читателей

1. Семь семерок. Найдите множимое и множитель в следующем примере на умножение:

```
 ×..7..
  .....
 ─────────
  .7....
  ....7
77....
.....
....7.
─────────
........7.
```

2. Дважды два — четыре. Чему равно ДВА?

```
 ×ДВА
  ДВА
 ──────
  ****
 ***В
Е***
──────
ЧЕТЫРЕ
```

(Здесь одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.)

Л. Мочалов

3. Сколько в сажени аршин?

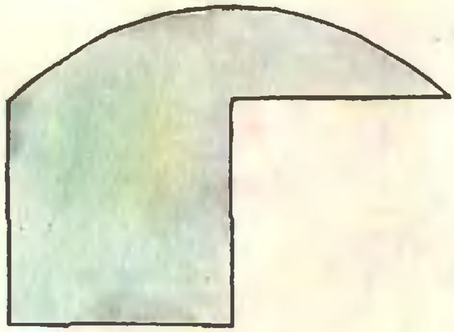
```
сажень | ?
сж     |──────
────   | аршин
 жж
 жс
 ───
  се
   6
  ───
   си
   си
   ───
    сь
    сь
    ───
```

Здесь зашифрован пример на деление: цифры заменены буквами. Про число, стоящее в делителе, ничего не известно.

Найдите делитель, и вы узнаете, во сколько раз сажень больше аршина.

Э. Рекстин

КВАНТ для младших школьников



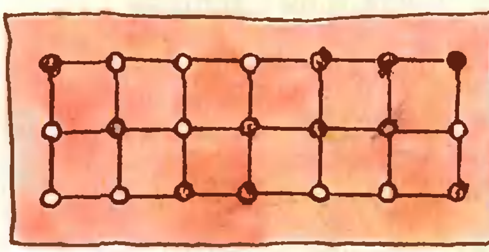
Задачи

1. Несколько знатоков взялись за расшифровку числового ребуса ТАМТАМ + МРАК = КОШМАР, причем каждый из них получил верный ответ, отличный от ответов других. Знатоки исходили из того, что каждая буква означает некоторую цифру, причем разные цифры обозначены разными буквами. Сколько могло быть знатоков?

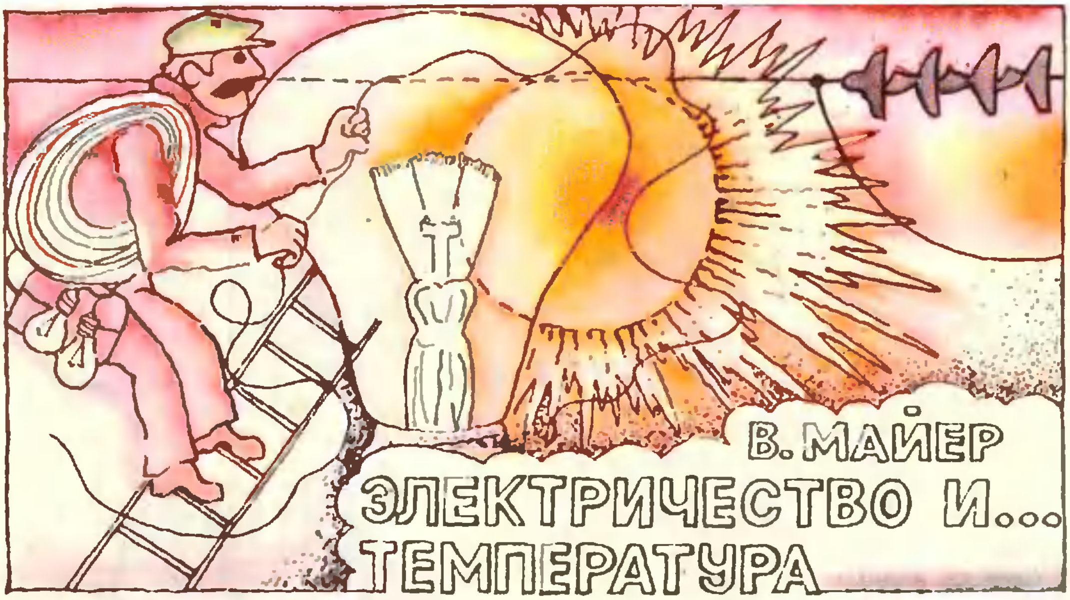
2. Докажите, что сумма любых двенадцати последовательных чисел натурального ряда не делится на 4.

3. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две конгруэнтные части.

4. На столе стоят шесть стаканов. За один раз можно перевернуть любые пять из них. Можно ли, повторяя несколько раз эту операцию, поставить все шесть стаканов вверх дном? Попробуйте обобщить эту задачу на случай $2n$ стаканов.



5. В вершинах квадратной сетки, имеющей форму прямоугольника (см. рисунок), помещена 21 точка. Можно ли покрасить эти точки в два цвета так, чтобы ни одна четверка одноцветных точек не образовывала прямоугольник?



Что такое проводники электричества? Какие проводники вы знаете? Что такое сопротивление проводника? Почему проводник обладает сопротивлением? Как сопротивление зависит от размеров проводника и от материала, из которого он изготовлен?

Наверное, вы сможете ответить на эти вопросы сразу. А теперь предлагаем вам еще один вопрос: *что будет происходить с сопротивлением при изменении внешних условий — температуры и давления*? Не торопитесь с ответом. Советуем вам прежде проделать несколько опытов.

1. Возьмите перегоревшую электрическую лампу (мощностью 100 Вт, на напряжение 220 В), батарейку (типа 3336Л, на 4,5 В), лампочку для карманного фонаря (на напряжение 3,5 В и ток 0,26 А), соединительные провода и спички. Ваша задача — исследовать зависимость сопротивления металлического проводника (спирали перегоревшей электролампы) от температуры.

Отрежьте кусок спирали длиной около 1 см; в концы этого куска вставьте медные проволочки так, чтобы между ними и спиралью был хороший контакт. Соберите цепь, состоящую из последовательно соединенных спирали, батарейки и лампочки.

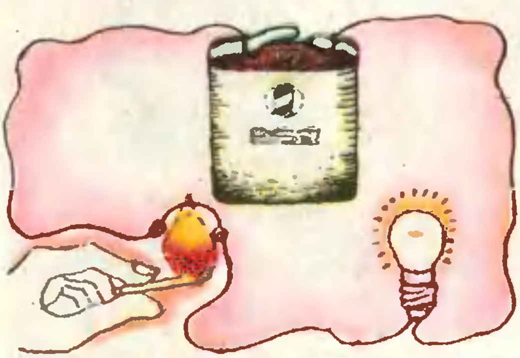


Рис. 1.

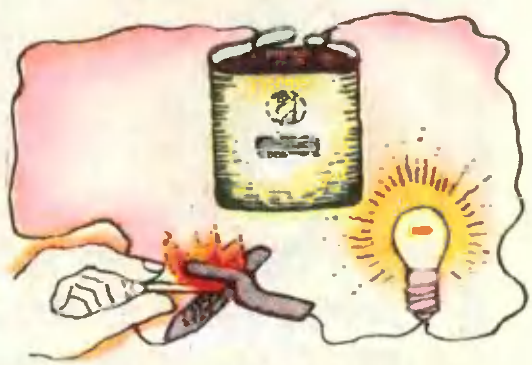


Рис. 2.

Теперь зажгите спичку и раскалите спираль докрасна — лампочка почти совсем погаснет (рис 1).

Значит, *при повышении температуры сопротивление металлического проводника увеличивается*.

2. Замените металлический проводник электролитом (раствором соли в воде) и проверьте, как его сопротивление зависит от температуры.

Вырежьте из жести две небольшие полоски и одну из них изогните так, чтобы между полосками был воздушный промежуток толщиной 1—3 мм. В этот промежуток введите несколько капель раствора соли. Концентрацию раствора подберите такой, чтобы при замыкании цепи лампочка, включенная последовательно с батарейкой и электролитом, горела едва заметно.

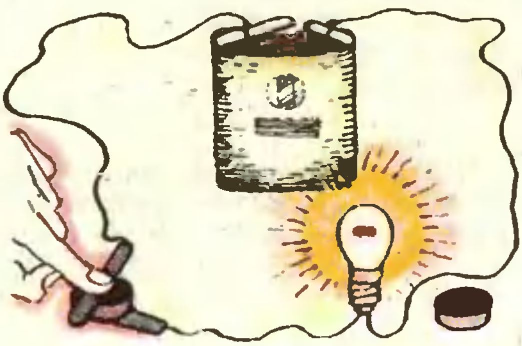


Рис. 3.

Нагрейте электролит (с помощью горящей спички), и вы увидите, что лампочка станет гореть ярче (рис. 2).

Следовательно, *при нагревании сопротивление электролита уменьшается*.

3. Воспользуйтесь схемой предыдущего опыта, только между полосками из жести положите таблетку карболена (активированного угля, он продается во всех аптеках) — лампочка не горит.

Нажмите пальцем на верхнюю полоску так, чтобы таблетка угля оказалась сжатой, — лампочка загорится (рис. 3).

Таким образом, *при увеличении давления сопротивление угля уменьшается*.

...и фокус не удался

Этот разговор произошел в поезде.

Когда обычные развлечения дальней поездки успели всем наскучить, пассажиру А. пришла в голову прекрасная идея.

А. Хотите, покажу фокус?

В. Нужны карты?

А. О, нет! Только бумага и карандаш.

Итак, напишите какое-нибудь четырехзначное число.

В. Готово!

А. Как угодно переставьте его цифры. Переставили? Теперь от бо́льшего числа отнимите меньшее. В получившейся разности зачеркните какую-нибудь одну цифру.

В. Зачеркнул. Что дальше?

А. Сложите остальные цифры и назовите сумму.

В. Одну минуточку! Так... у меня получилось 16.

А. Вы зачеркнули двойку.

В., со словами: «Да вы настоящий телепат!», показал свою бумажку. На ней было написано:

4975; 7594; 7594—4975 = = ~~2~~619; 6+1+9=16.

В. В чем секрет Вашего «фокуса»?

А. Это — простая арифметика. После того, как Вы назвали сумму 16, я взял первое число, кратное девяти и бо́льшее этой суммы, то есть 18. Разность между подобранным числом и суммой есть зачеркнутая цифра. Если бы Ваша сумма оказалась равной 19, то я назвал бы восьмерку (8=27—19). Если бы у Вас получилось 8, то мой ответ был бы единица (1=9—8).

«Все понял!» — обрадовался **В.** и побежал показывать фокус в соседнем купе.

. . . .

В. Сколько вы получили в сумме?

С. Ровно 9.

В. Вы зачеркнули цифру 9.

Молча, **С.** показал свою запись. Раздосадованный **В.** прочел: 4353; 3345; 4353—3345=1~~0~~08; 1+0+8=9.

Объясните, почему у **В.** фокус не получился.

Н. Михайленко

С. Овчинников, И. Шарыгин

Решение неравенств с модулем

В этой заметке излагается прием, который, в некотором смысле, «автоматически» сводит решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, к решению *систем* и *совокупностей* неравенств, где переменные уже свободны от знака модуля.

Пусть даны несколько неравенств — скажем, для простоты, два неравенства с одной (и той же) переменной:

$$f(x) > 0, \qquad (1)$$

$$g(x) > 0. \qquad (2)$$

Обозначим множество решений неравенства (1) через A, неравенства (2) — через B.

Если требуется найти множество чисел, которые одновременно удовлетворяют неравенству (1) **и** неравенству (2), то есть найти пересечение $C = A \cap B$ множеств A и B, то неравенства (1), (2) соединяют фигурной скобкой

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

и называют *системой* неравенств («Алгебра и начала анализа 10», п. 123).

Если же требуется найти множество чисел, удовлетворяющих неравенству (1) **или** неравенству (2), то есть объединение $D = A \cup B$ множеств A и B, то неравенства (1), (2) соединяют квадратной скобкой

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array} \right.$$

и называют *совокупностью* неравенств *).

Повторим еще раз: когда ищут пересечение — говорят «система»; когда ищут объединение — говорят «совокупность». В таблице

Система	Совокупность
пересечение	объединение
и	или

сведены три пары соответствующих друг другу понятий **).

При решении задач, как мы сейчас увидим, часто приходится рассматривать комбинации систем и совокупностей; чтобы избегать в таких случаях ошибок, следует аккуратно пользоваться введенными выше обозначениями.

* * *

Обычный прием решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, — «раскрытие» модуля — состоит в следующем. Исходя из определения модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

множество допустимых значений переменной разбивают на непересекающиеся подмножества, на каждом из которых все функции, содержащиеся под знаком модуля, сохраняют знак. После этого решение исходной задачи сводится к решению совокупности систем неравенств.

Пусть, например, требуется решить неравенство

$$|x-1| + |x-2| > 3+x$$

Разобьем числовую ось на непересе-

*) Абсолютно аналогично определяются термины «система уравнений» и «совокупность уравнений» («Алгебра и начала анализа 10», п. 122).

**) Таблицу можно было бы продолжить парой терминов «конъюнкция — дизъюнкция»; об этих терминах см., например, «Квант», 1971, № 4, с. 15, или 1947, № 12, с. 14, или 1975, № 1, с. 29.

кающиеся промежутки $]-\infty;\ 1[$, $[1;\ 2[$ и $[2;\ +\infty[$. На каждом из этих промежутков выражения $x-1$ и $x-2$ сохраняют знак. «Раскрывая» модули, приходим к следующей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1, \\ -(x-1)-(x-2)>3+x, \end{cases} \\ \begin{cases} 1\leqslant x<2, \\ (x-1)-(x-2)>3+x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant 2, \\ (x-1)+(x-2)>3+x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Множеством решений верхней системы является пересечение $]-\infty;\ 1[\cap]-\infty;\ 0[$, то есть промежуток $]-\infty;\ 0[$; средняя система решений не имеет; наконец, множество решений нижней системы есть пересечение $[2;\ +\infty[\cap];6\ +\infty[$, то есть промежуток $]6;\ \infty[$. Объединяя (совокупность!) полученные множества, получим ответ: $]-\infty;0\ [\cup]\ 6;\ +\infty\ [$.

При таком способе решения часто приходится рассматривать много случаев, а порой и подслучаев. Кроме того, иногда раскрытие модуля сопряжено с техническими трудностями (см. ниже пример 4).

* * *

В основе обещанного выше приема лежит простая теорема:

1) $|f(x)|\leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leqslant g(x), \\ f(x)\geqslant -g(x); \end{cases}$

2) $|f(x)|\geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\geqslant g(x), \\ f(x)\leqslant -g(x). \end{array}\right.$

Она легко доказывается «раскрытием» модуля. Пусть, например, x_0 является решением неравенства $|f(x)|\leqslant g(x)$, то есть

$$|f(x_0)|\leqslant g(x_0). \qquad (3)$$

Тогда $g(x_0)\geqslant 0$. Если $f(x_0)\geqslant 0$, то $|f(x_0)|=f(x_0)$ и неравенство (3) принимает вид

$$f(x_0)\leqslant g(x_0). \qquad (4)$$

Поскольку $f(x_0)\geqslant 0$ и $g(x_0)\geqslant 0$,

$$f(x_0)\geqslant -g(x_0). \qquad (5)$$

Неравенства (4), (5) означают, что в рассматриваемом случае x_0 является решением системы

$$\begin{cases} f(x)\leqslant g(x), \\ f(x)\geqslant -g(x). \end{cases}$$

Если же $f(x_0)<0$, то $|f(x_0)|=-f(x_0)$ и неравенство (3) принимает вид $-f(x_0)\leqslant g(x_0)$, что равносильно неравенству (5). Неравенство (4) вытекает в этом случае из того, что $f(x_0)<0$, а $g(x_0)\geqslant 0$.

Закончите доказательство теоремы самостоятельно.

Теорема, конечно, остается справедливой при замене повсюду знака нестрогого неравенства $\leqslant$ на знак строгого неравенства $<$.

* * *

Пример 1. (Геогр. ф-т МГУ, 1977). *Решить неравенство*

$$2|x+1|>x+4.$$

Решение.

$$2|x+1|>x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2>x+4, \\ 2x+2<-x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-2. \end{array}\right.$$

Пример 2 (Геол. ф-т МГУ, 1977). *Решить неравенство*

$$|x-2|\leqslant 2x^2-9x+9.$$

Решение.

$$|x-2|\leqslant 2x^2-9x+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\leqslant 2x^2-9x+9, \\ x-2\geqslant -2x^2+9x-9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-10x+11\geqslant 0, \\ 2x^2-8x+7\geqslant 0. \end{cases}$$

Решения неравенств, входящих в полученную систему, изображены разной штриховкой на рисунке 1. Беря их пересечение, получаем ответ:

$$\left]-\infty;\ \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2};\ +\infty\right[.$$

Вернемся к неравенству, которое в начале статьи было решено «раскрытием» модуля.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$|x-1|+|x-2|>3+x.$$

Рис. 1.

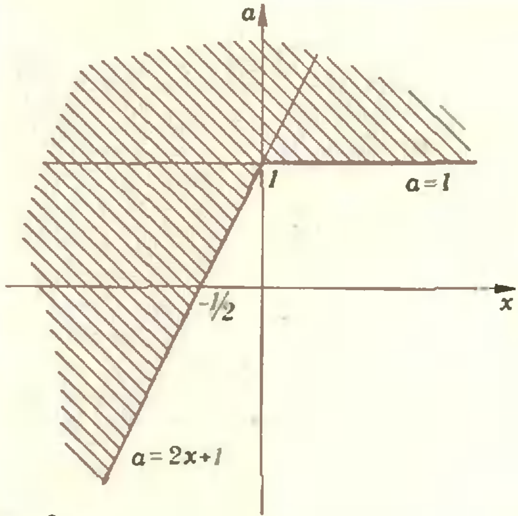


Рис. 2.

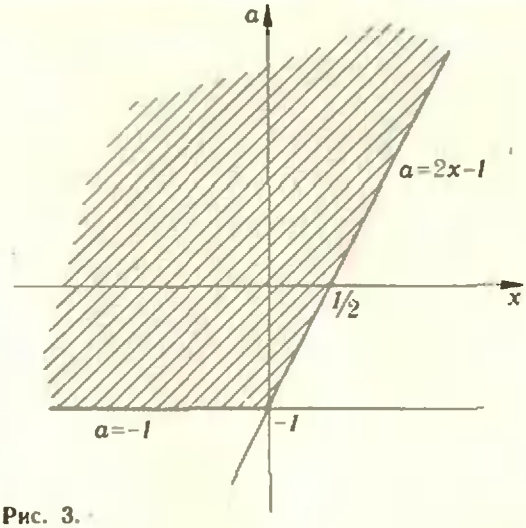


Рис. 3.

Решение. Дважды применяя теорему, имеем

$$|x-1|+|x-2|>3+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-1|>3+x-|x-2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1>3+x-|x-2|,\\ x-1<-3-x+|x-2| \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|>4,\\ |x-2|>2x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-2>4,\\ x-2<-4, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-2>2x+2,\\ x-2<-2x+2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>4,\\ x-2<-4,\\ x-2>2x+2,\\ x-2<-2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6,\\ x<-2,\\ x<-\frac{4}{3},\\ x<0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6,\\ x<0. \end{array}\right.$$

Ответ: $]-\infty;0[\ \cup\ ]6;+8[$.

Решения всех предыдущих задач несложно получить и с помощью «раскрытия» модуля. Следующий пример решить этим приемом довольно трудно, тогда как доказанная теорема позволяет решить его весьма просто.

Пример 4. *Решить неравенство*

$$||3^x+4x-9|-8|\leqslant 3^x-4x-1.$$

Решение. Опять дважды применяем теорему:

$$||3^x+4x-9|-8|\leqslant 3^x-4x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |3^x+4x-9|\leqslant 3^x-4x+7,\\ |3^x+4x-9|\geqslant -3^x+4x+9 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3^x+4x-9\leqslant 3^x-4x+7,\\ 3^x+4x-9\geqslant -3^x+4x-7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3^x+4x-9\geqslant -3^x+4x+9,\\ 3^x+4x-9\leqslant 3^x-4x-9 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 2,\\ 3^x\geqslant 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3^x\geqslant 9,\\ x\leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 2,\\ x\geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2,\\ x\leqslant 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Таким образом, искомое множество равно $[0;\ 2]\cap(]-\infty;\ 0]\cup[2;+\infty[)$.

Ответ: $\{0,\ 2\}$.

Мы закончим эту заметку неравенством с параметром.

Пример 5. *Решить неравенство*

$$|1-|x||<a-x.$$

Решение.

$$|1-|x||<a-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-|x|<a-x,\\ 1-|x|>-a+x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

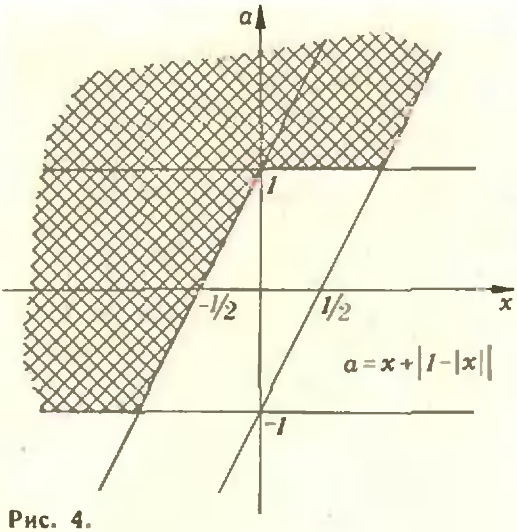


Рис. 4.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x|>1-a+x, \\ |x|<1+a-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>1-a+x, \\ x<-1+a-x, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x<1+a-x, \\ x>-1-a+x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>1, \\ x<\dfrac{a-1}{2}, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x<\dfrac{a+1}{2}, \\ a>-1. \end{cases} \end{cases}$$

В принципе полученная комбинация неравенств позволяет выписать ответ. Мы, однако, для окончательного решения воспользуемся приемом, который вообще часто оказывается полезным при решении задач с параметрами *).

Рассмотрим координатную плоскость, по одной оси которой будем откладывать значения x, а по другой — значения a. На рисунке 2 изображено множество решений совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} a>1, \\ x<\dfrac{a-1}{2}, \end{array}\right.$ а на рисунке 3 — множество решений системы $\begin{cases} x<\dfrac{a+1}{2}, \\ a>-1. \end{cases}$

На рисунке 4 заштриховано пересечение двух этих множеств, то есть множество решений системы, равносильной исходному неравенству. Из этого рисунка уже совсем легко выписать ответ: для $a\in\,]-\infty;\ -1]$ решений нет, для $a\in\,]-1;\ +1]$ имеем $x\in\left]-\infty;\dfrac{a-1}{2}\right[$, для $a\in\,]1;\ +\infty[$ имеем $x\in\left]-\infty;\dfrac{a+1}{2}\right[$.

* * *

Внимательный читатель может заметить следующее: если уж авторы прибегают к плоскости Oxa, то не проще ли было с самого начала изобразить на этой плоскости график функции

$$a=x+\,||1-|x||$$

и, рассматривая область над этим графиком, выписать ответ. Такой читатель, безусловно, прав. (Красная линия на рисунке 4 и есть график функции $a=x+||1-|x||$.)

Метод, использующий координатную плоскость, одна из осей которой — ось значений параметра, является очень сильным, и с его помощью решаются многие трудные задачи.

Упражнения

Решить следующие неравенства (задачи 1—4):

1. (Биофак МГУ, 1968) $|3x+2|\leqslant x^2+x$.
2. (Физфак МГУ, 1974) $3|x-1|>(x-1)^2+1$.
3. (Геогр. ф-т МГУ, 1977)
   а) $3|x-1|\leqslant x+3$;
   б) $4|x+2|<2x+10$;
   в) $3|x+1|\geqslant x+5$.
4. (Геол. ф-т МГУ, 1977)
   а) $3x^2-|x-3|>9x-2$;
   б) $x^2+4\geqslant|3x-2|-7x$;
   в) $x^2-|5x-3|-x<2$.
5. (Отд. политэкон. эконом. ф-та МГУ, 1977)
   а) Определить, при каких a неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.
   б) Определить, при каких a неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

*) См. «Квант», 1970, № 9, с. 19.

Ю. Зайчиков

Сила Лоренца и ее работа

Как известно, на любую заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца. Это происходит в машинах, вырабатывающих электрический ток, и электромоторах, в ускорителях заряженных частиц и телевизионных электронно-лучевых трубках, при движении различных частиц в магнитном поле Земли и т. д.

Вспомним основные свойства силы Лоренца. Ее модуль

$$|\vec{F}_л| = q\,|\vec{v}|\,|\vec{B}|\sin\alpha,$$

где q — заряд частицы, $\vec{v}$ — ее скорость, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля и α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Эта сила всегда перпендикулярна скорости частицы *и магнитному полю*. Направление силы удобно находить по правилу левой руки: если вектор $\vec{B}$ входит в ладонь, а четыре вытянутых пальца направлены по скорости $\vec{v}$, то отогнутый большой палец показывает направление силы Лоренца $\vec{F}_л$, действующей на положительный заряд (рис. 1, *а*), в случае отрицательного заряда направление силы — противоположное (рис. 1, *б*).

С помощью силы Лоренца можно *довольно просто объяснить* многие электромагнитные явления.

Рассмотрим несколько примеров.

1. В магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает заряд $+q$; его скорость $\vec{v}$ перпендикулярна магнитному полю (рис. 2). Каким будет дальнейшее движение заряда?

Сила Лоренца, действующая на заряд, в любой момент перпендикулярна его скорости; следовательно, она не в состоянии изменить модуль скорости, но может изменить ее направление. В результате заряд, получив центростремительное ускорение $\vec{a}_ц$, будет двигаться по окружности. Нетрудно найти радиус R этой окружности: по второму закону Ньютона

$$|\vec{F}_л| = m|\vec{a}_ц|, \text{ или } q|\vec{v}||\vec{B}| = m\frac{|\vec{v}|^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|}$$

(m — масса заряженной частицы).

Заметим, что в этом случае сила Лоренца, перпендикулярная скоро-

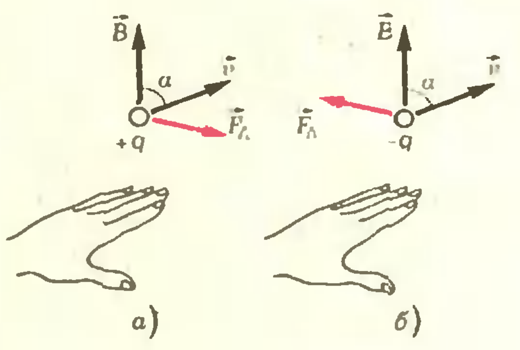


Рис. 1.

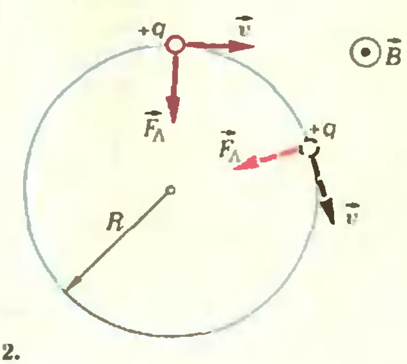


Рис. 2.

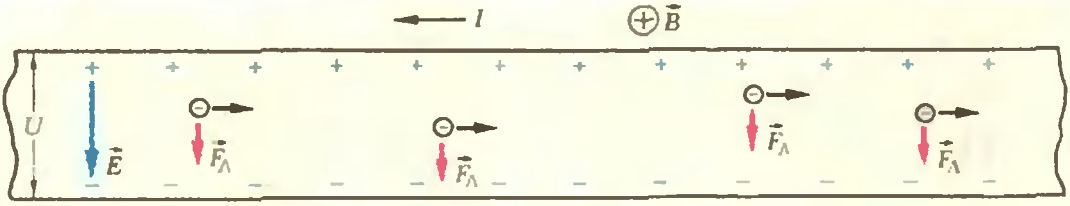


Рис. 3.

сти (а значит, и перемещению) заряда, **работы не совершает** — заряд движется по окружности с постоянной по модулю скоростью.

2. Выясним, что происходит с проводником с током в магнитном поле.

Для определенности рассмотрим **металлический** проводник. Как известно, в металлическом проводнике ток представляет собой упорядоченное движение **свободных электронов**. В магнитном поле на них будет действовать сила Лоренца, направление которой, как обычно, можно определить по правилу левой руки. Пусть ток по проводнику течет справа налево (электроны движутся слева направо), а магнитное поле направлено от нас перпендикулярно плоскости чертежа, тогда на каждый электрон действует сила Лоренца, направленная вниз (рис. 3).

Поскольку электроны свободны, они начнут перемещаться под действием этих сил. В результате на нижней стороне проводника образуется избыток отрицательных зарядов, а на верхней — их недостаток. Другими словами, в проводнике создается поперечное электрическое поле $\vec{E}$ (направленное в нашем случае сверху вниз) и возникает поперечная разность потенциалов U.

(Этот эффект называется *эффектом Холла*. Он был открыт Холлом в 1879 году и уже в следующем, 1880, году был объяснен Лоренцем.)

Движение электронов поперек проводника будет происходить до тех пор, пока возникшее электрическое поле не скомпенсирует действие силы Лоренца (рис. 4):

$$\vec{F}_{эл} = -\vec{F}_л,$$

или

$$e|\vec{E}| = e|\vec{v}|\,|\vec{B}|$$

(здесь e — заряд электрона, $\vec{v}$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля).

Отсюда нетрудно найти напряженность электрического поля и поперечную разность потенциалов:

$$|\vec{E}| = |\vec{v}|\,|\vec{B}| \quad \text{и} \quad U = |\vec{E}|d = |\vec{v}|\,|\vec{B}|d,$$

где d — ширина проводника.

С другой стороны, средняя скорость $\vec{v}$ связана с током I в проводнике:

$$I = en|\vec{v}|S, \text{ или } |\vec{v}| = \frac{I}{enS},$$

где n — число свободных электронов в единичном объеме проводника, S — площадь поперечного сечения проводника.

Тогда окончательно для разности потенциалов U получим:

$$U = |\vec{v}|\,|\vec{B}|\,d = \frac{d}{enS} I\,|\vec{B}|.$$

Продолжим наши рассуждения по поводу поведения проводника с током в магнитном поле. Как было показано еще в 1820 году Ампером, на участок проводника длины Δl, по которому течет ток I (так называемый элемент тока $I\overrightarrow{\Delta l}$), со стороны магнитного поля $\vec{B}$, составляющего угол α с элементом тока, действует сила

$$|\vec{F}| = |I\overrightarrow{\Delta l}|\,|\vec{B}|\sin\alpha.$$

Сила $\vec{F}$ перпендикулярна элементу

Рис. 4.

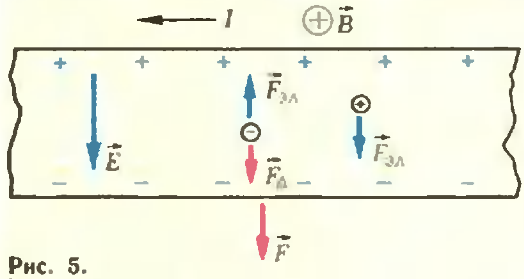


Рис. 5.

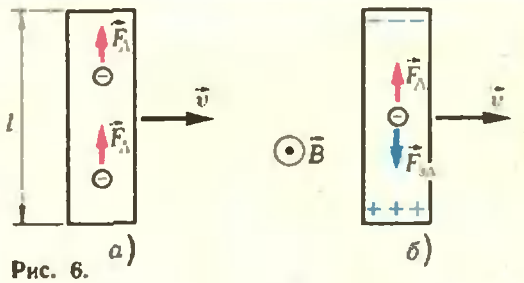


Рис. 6.

тока и магнитному полю, и ее направление определяется правилом левой руки (рис. 5).

Оказывается, происхождение этой силы, которую часто называют силой Ампера, легко можно объяснить с помощью силы Лоренца *). Из рисунка 5 видно, что сила Ампера $\vec{F}$ является просто суммой сил Лоренца $\vec{F}_Л$, действующих на упорядоченно движущиеся электроны (создающие электрический ток). Причем электрическое поле $\vec{E}$, приостановившее поперечное перемещение электронов, вовсе не мешает возникновению этой суммарной силы, поскольку оно одинаково (но в противоположных направлениях) действует как на электроны, так и на положительные ионы, образующие кристаллическую решетку металла. Электрические силы ($\vec{F}_{эл}$) взаимно компенсируются, а силы Лоренца, действующие только на движущиеся электроны, в сумме дают силу Ампера. Таким образом сила Лоренца, действующая на движущиеся электроны, передается сплошному проводнику, и если ничто не удерживает проводник, он начнет ускоренно двигаться вниз.

3. Наконец, обсудим случай, когда н е з а р я ж е н н ы й м е т а л л и ч е с к и й п р о в о д н и к б е з т о к а движется в магнитном поле.

Как показывает опыт, на концах такого проводника возникает разность потенциалов, а если концы замкнуть, по цепи пойдет ток, называемый индукционным. (Именно по такому принципу работают самые распространенные генераторы, преобразующие энергию механического движения в энергию электрического тока.)

Почему и как возникает индукционный ток? Пусть незамкнутый проводник длины l движется со скоростью $\vec{v}$ перпендикулярно магнитному полю $\vec{B}$ (рис. 6). Свободные электроны проводника движутся вместе с ним; следовательно, на них будет действовать сила Лоренца, вызывающая перемещение электронов внутри проводника, в нашем случае — снизу вверх (рис. 6, *а*). Как и в эффекте Холла, это перемещение электронов быстро прекратится, так как скопление отрицательных зарядов вверху и их недостаток внизу создадут электрическое поле, компенсирующее действие силы Лоренца (рис. 6, *б*).

Если концы данного проводника соединить с каким-нибудь неподвижным проводником, по которому он будет скользить как по рельсам (рис. 7), то электроны, скопившиеся у верхнего конца, смогут перейти к нижнему концу не прямым путем, где им препятствует сила Лоренца, а обходным — по неподвижному проводнику, где этой силы нет. При этом разность потенциалов на концах проводника уменьшится, электроны внутри проводника вновь начнут сме-

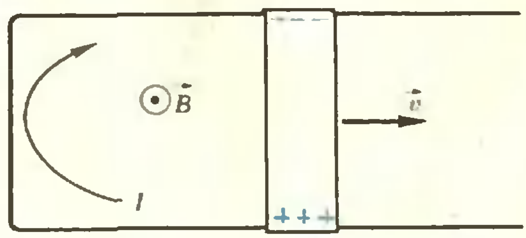


Рис. 7.

*) Можно даже вычислить силу Ампера, исходя из выражения для силы Лоренца, хотя исторически было как раз наоборот — Лоренц вывел свою формулу, опираясь на экспериментальный закон Ампера.

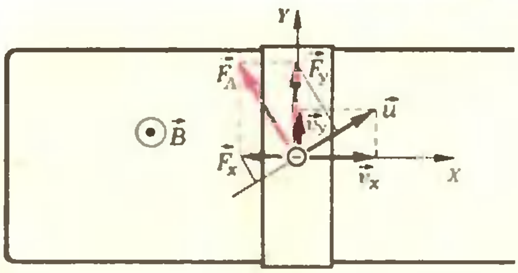


Рис. 8.

щаться вверх, непрерывно поддерживая прежнюю разность потенциалов.

Таким образом, в замкнутой цепи возникает непрекращающееся направленное движение электронов, то есть электрический ток. Роль источника тока выполняет подвижный проводник, внутри которого электроны перемещаются под действием силы Лоренца (играющей роль сторонней силы). Возникающая на концах проводника разность потенциалов обеспечивает дальнейшее перемещение электронов по внешней цепи.

Что можно сказать о работе силы Лоренца в этом случае? С одной стороны, сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряда, и поэтому она не может совершать работу. С другой стороны, как мы только что видели, именно благодаря силе Лоренца возникает разность потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле; получается, что сила Лоренца совершает работу.

Попробуем разобраться в этом противоречии, для чего рассмотрим более подробно процессы, происходящие в н у т р и   д в и ж у щ е г о с я   п р о в о д н и к а.

Введем оси координат X и Y (рис. 8): ось X направим по движению проводника, а ось Y — вдоль проводника вверх. Обозначим через $\vec{v}_x$ скорость движения электрона вместе с проводником. Как только проводник пришел в движение, на электроны начали действовать силы Лоренца. Под их влиянием возникло перемещение электронов внутри проводника вдоль оси Y со скоростью $\vec{v}_y$. Результирующая скорость электрона

$$\vec{u} = \vec{v}_x + \vec{v}_y.$$

Сила Лоренца перпендикулярна именно этой скорости и направлена не вдоль проводника, как мы считали раньше, а под углом к нему.

Разложим силу Лоренца $\vec{F}_л$ на составляющие $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ (см. рис. 8). Очевидно, что сила $\vec{F}_л$ работы не совершает, поскольку она перпендикулярна скорости электрона, а вот работы сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ отличны от нуля. При этом сила $\vec{F}_y$ совершает положительную работу, а $\vec{F}_x$ — равную по модулю, но отрицательную работу (их проекции на направление скорости $\vec{u}$ одинаковы по величине, но противоположны по знаку).

Хотя в сумме работа сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ равна нулю, работа каждой силы отлична от нуля и имеет определенный физический смысл. Силы $\vec{F}_y$ перемещают электроны вдоль проводника, создавая тем самым индукционный ток. Их суммарная работа, отнесенная к единице заряда, представляет собой электродвижущую силу индукции. Силы $\vec{F}_x$ тормозят движение проводника. Для того чтобы проводник двигался равномерно, на него извне должна действовать сила, направленная вдоль оси X и равная по модулю сумме всех сил $\vec{F}_x$ (силами трения пренебрегаем). Следовательно, суммарная работа сил $\vec{F}_x$ равна по модулю работе внешней силы, приложенной к проводнику.

Таким образом, при движении проводника в магнитном поле совершаются три равные по модулю работы: работа $A_{вн}$ внешней силы по равномерному перемещению проводника, работа A_x сил $\vec{F}_x$, тормозящих это перемещение, и работа A_y сил $\vec{F}_y$ по созданию индукционного тока в проводнике. При этом

$$A_{вн} = -A_x = A_y,$$

другими словами, внешние усилия, затраченные на движение проводника, как бы передаются электронам, вызывая их перемещение вдоль проводника, то есть электрический ток.

Московский физико-технический институт

Ниже публикуются образцы вариантов вступительных письменных экзаменов по математике и физике в 1978 году. На письменную работу как по математике, так и по физике отводится пять часов.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3^{\cos 2x}\cdot(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9)=1.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_8(9x+18)}\leqslant \log_8(x+2).$$

3. В треугольнике ABC угол B прямой, медианы AD и BE взаимно перпендикулярны. Определить величину угла C.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5,\\ 3\sin x+2\sin y=0.\end{cases}$$

5. Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Скорость течения реки на участке AB вдвое больше, чем на участке BC, и на каждом из участков постоянна. Катер совершил три рейса: первый из A в C, второй из C в A и третий из A в B. В первых двух рейсах его скорость относительно воды была одна и та же, а в третьем рейсе в $1\frac{1}{4}$ раза больше, чем в первых двух. Первый рейс длился 7 часов, третий — 2 часа. Если скорость течения на участке AB была такой же, как и на участке BC, то первый рейс катер совершил бы за 6 часов (с прежней скоростью относительно воды). Сколько времени длился второй рейс? (Рейс — движение в одном направлении от начального пункта до конечного.)

6. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ совпадает с вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 — на окружности его основания. Найти отношение объемов конуса и призмы, если $|AB_1|:|AB|=5$.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$3\cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}}-27^{2x}>0$$

2. Проверить, какие из чисел $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi n}{2}$, где $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, являются решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos 2x}=6.$$

3. В разложении бинома $(1+x)^n$ по возрастающим показателям степеней x третье слагаемое в четыре раза больше пятого, а отношение четвертого слагаемого к шестому равно $\frac{40}{3}$. Найти n и x.

4. В окружность вписана трапеция $ABCD$. Диаметр, проведенный через вершину A, перпендикулярен боковой стороне CD. Через вершину C проведен перпендикуляр к основанию AD, пересекающий отрезок AD в точке M, а окружность в точке N так, что $|CM|:|MN|=\frac{5}{2}$. Найти величину угла при основании трапеции.

5. Вершины B, C, D параллелограмма $ABCD$ имеют соответственно координаты $(-3; 2)$, $(2; 3)$, $(3; -4)$ (BD — диагональ). Найти:

1) все значения a, для которых координаты вершины A являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-y-2a\leqslant 0,\\ 2x+6y+5a\leqslant 0;\end{cases}$$

2) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BD являются решением этой системы.

6. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

Физика

Вариант 1

1. Шар висит на нити, опираясь о стенку, как показано на рисунке 1. Центр шара C лежит на одной вертикали с точкой подвеса O, нить образует с вертикалью угол α, а радиус, проведенный в точку крепления нити A,— угол β. При каких значениях коэффициента трения шара о стенку такое равновесие возможно? Считать, что $\alpha+\beta=\pi/2$.

2. В запаянной с одного конца горизонтально лежащей трубке находится воздух с относительной влажностью $r_0=0{,}8$, отделенный от атмосферы каплей ртути длиной $l=7{,}6$ см. Какой станет относительная влажность воздуха r, если трубку поставить вертикально открытым концом вниз? Температура поддерживается постоянной, внешнее атмосферное давление $p=760$ мм рт. ст. Ртуть из трубки при ее переворачивании не выливается.

3. Для измерения напряженности $E_З$ собственного электрического поля Земли у ее поверхности использовали две метал-

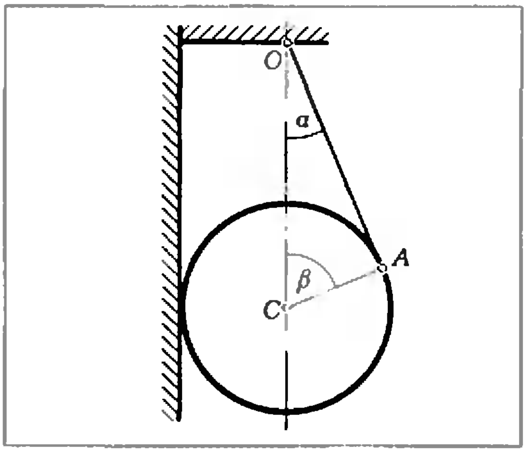


Рис. 1.

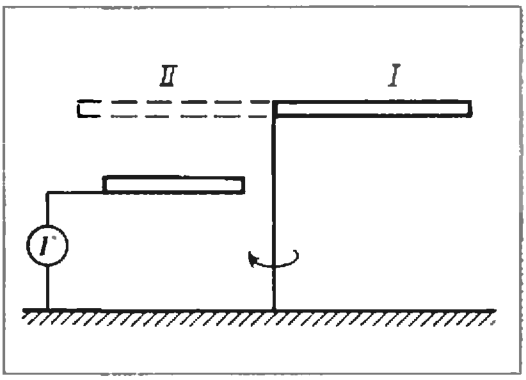


Рис. 2.

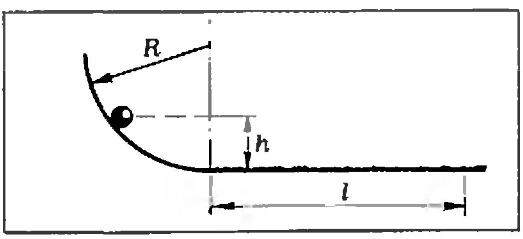


Рис. 3.

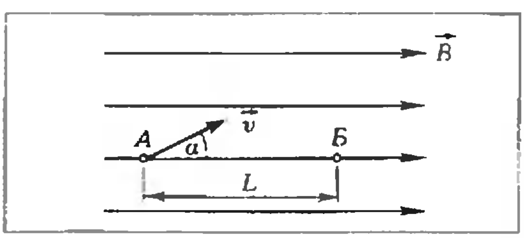


Рис. 4.

лические пластины (рис. 2). Нижняя пластина с площадью $S=1,2$ м^2 расположена на небольшом расстоянии от поверхности Земли и через гальванометр заземлена. Верхняя пластина соединена с Землей и может вращаться вокруг вертикальной оси. Сначала верхняя пластина занимает положение I. Затем ее поворачивают, и она полностью закрывает нижнюю пластину. За время поворота через гальванометр прошел заряд $Q=2,1\cdot10^{-9}$ Кл. Вычислить поле Земли $E_З$. Влиянием краевых эффектов пренебречь.

4. При фотографировании на фотопленке получаются (из-за конечной разрешающей способности пленки) резко изображенными не только те предметы (находящиеся на расстоянии d_0), на которые наведен объектив фотоаппарата, но также и предметы, находящиеся несколько ближе и несколько дальше этого расстояния. То есть резкими получаются предметы, лежащие внутри некоторой области $d_1 \div d_2$ ($d_1<d_0$, $d_2>d_0$, d_1 называется ближней границей глубины резкости, d_2 — дальней). Оказалось, что при наведении объектива фотоаппарата на предмет, находящийся на расстоянии $d_0=10$ м, ближняя граница глубины резкости расположена на расстоянии $d_1=7,8$ м. Найти дальнюю границу.

Вариант 2

1. Выезд с горки на горизонтальную плоскость представляет собой дугу окружности радиуса $R=4$ м (рис. 3). Поверхность горки гладкая, а горизонтальная поверхность — шероховатая с коэффициентом трения $k=0,2$. Санки, съехав с горки, остановились на расстоянии $l=30$ м от ее конца. На какой высоте h человек в санках испытал двукратную перегрузку?

2. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t=108°$C и повышенном давлении. Какая часть воды испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость воды $c=1$ кал/(г·град), удельная теплота парообразования $\lambda=539$ кал/г. Теплообменом за время установления равновесия пренебречь.

3. Электрон влетает в однородное магнитное поле индукции $\vec{B}$. В точке A он имеет скорость $\vec{v}$, которая составляет с направлением поля угол α (рис. 4). При каких значениях индукции магнитного поля электрон окажется в точке $Б$? Заряд электрона e, масса m, расстояние $|AБ|=L$.

4. Расстояние от заднего фокуса тонкой линзы до изображения в 9 раз больше расстояния от переднего фокуса до предмета. Найти линейное увеличение.

Вариант 3

1. Два бруска массой $M=100$ г каждый, связанные нитью, соскальзывают с наклонной плоскости с углом $\alpha=30°$. Коэффициент трения нижнего бруска о плоскость $k_1=0,2$, верхнего — $k_2=0,5$. Определить натяжение нити.

2. В микрокалориметр теплоемкости $C=100$ Дж/К помещен образец изотопа кобальта с относительной атомной массой $A=61$. Масса образца $m=10$ мг. При распаде ядра ^{61}СО выделяется энергия $W=2\times10^{-19}$ Дж. Через время $\tau=50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t=0,06°$. Оценить период полураспада ^{61}СО. Число Авогадро $N_0=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

3. Какой заряд Q протечет через гальванометр после замыкания ключа K в схе-

ме, показанной на рисунке 5? ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$, емкость конденсаторов равна C.

4. Предмет и его прямое изображение, создаваемое тонкой линзой, расположены симметрично относительно фокуса линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы равно 4 см. Найти фокусное расстояние линзы.

Вариант 4

1. Тело без начальной скорости соскальзывает в яму, стенки которой гладкие и плавно переходят в горизонтальное дно

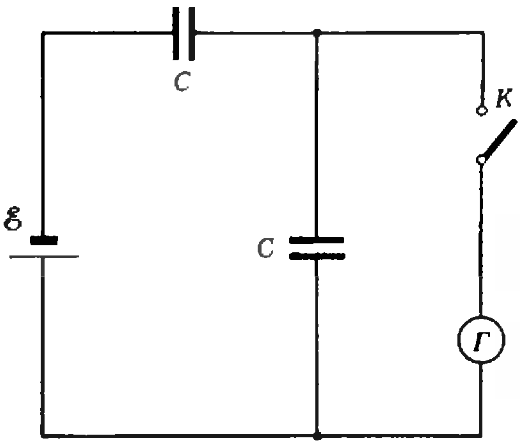


Рис. 5.

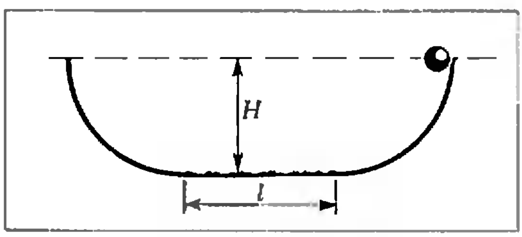


Рис. 6.

(рис. 6). Длина дна $l=2$ м, коэффициент трения тела о дно ямы $k=0{,}3$. Глубина ямы $H=5$ м. На каком расстоянии от середины ямы тело остановится?

2. В камере сгорания реактивного двигателя объема $V=0{,}1$ м^3 при температуре $T=2000$ К давление равно $p=2\cdot10^6$ Н/м^2. Расход топлива $M=30$ кг/с, средняя молярная масса продуктов сгорания $\mu=21$ кг/кмоль. Определить время пребывания порции топлива в камере сгорания. Газовая постоянная $R=8{,}3\times10^3$ Дж/(кмоль·К).

3. Какой максимальный заряд можно сообщить шару из металлизированной ткани радиусом $R=2$ м и толщиной стенки $\Delta R=0{,}02$ см? Предел прочности на разрыв материала стенки $\sigma_{\text{пр}}=50$ Н/мм^2. Величиной изменения объема шара пренебречь.

4. С помощью тонкой линзы получают полуторакратно увеличенное действительное изображение предмета. Затем линзу передвигают на 12 см и получают мнимое изображение такого же размера. Определить фокусное расстояние линзы.

С. Козел, Б. Федосов, В. Чехлов, А. Шелагин

Информация

Приглашаем на малый мех-мат

Малый мех-мат (МММФ) — это заочная математическая школа при механико-математическом факультете МГУ, являющаяся отделением Всесоюзной заочной математической школы (ВЗМШ) *). Занимаясь на малом мех-мате, школьники 8—10 классов смогут углубить свои знания по важнейшим разделам школьной программы и подготовиться к поступлению на мех-мат МГУ или в другой ВУЗ. Многие задания, высылаемые учащимся МММФ, составлены на основе задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике на мех-мат. Разработка заданий, а также методических указаний ведется методическим советом МММФ, которым руководят профессора факультета.

На малом мех-мате обучаются школьники следующих областей: Астраханской, Брянской, Белгородской, Владимирской, Волгоградской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калужской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Липецкой, Московской, Оренбургской, Орловской, Пензенской, Пермской, Ростовской, Рязанской, Саратовской, Свердловской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ульяновской, Челябинской, Ярославской, Минской, Брестской, Витебской, Гомельской, Гродненской, Могилевской, а также: Башкирской АССР, Дагестанской АССР, Кабардино-Балкарской АССР, Калмыцкой АССР, Мордовской АССР, Северо-осетинской АССР, Татарской АССР, Удмуртской АССР, Чечено-Ингушской АССР, Чувашской АССР, Краснодарского края, Ставропольского края.

Прием на малый мех-мат проводится через систему областных олимпиад. Каждый участник областной олимпиады может подать заявление в оргкомитет олимпиады с просьбой о зачислении на малый мех-мат.

В случае, если Вы учитесь в 7-м классе, живете в одной из указанных областей и хотели бы учиться на малом мех-мате, Вы можете решить вступительную контрольную работу ВЗМШ и выслать ее в адрес малого мех-мата, так как школьники, проживающие в указанных областях, могут поступать как в соответствующие филиалы ВЗМШ, так и на малый мех-мат.

Для московских школьников работает Вечерняя математическая (7—9 классы) и Воскресная подготовительная (10 класс) школы. Вечерняя школа работает во все дни недели. Уточнить время работы школ можно по телефону 139-35-29.

*) См. «Квант», 1979, № 1 и с. 59 этого номера.

Новый прием в ВЗМШ

Вступительные контрольные работы (см «Квант» № 1, с. 58) семиклассники должны присылать по следующим адресам:

Область, республика	Адрес
Амурская область	675015. Благовещенск, ул. Ленина 104. Пединститут, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Башкирская АССР	452320. Башкирская АССР, Бирск, Интернациональная ул. 10. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Белорусская (кроме Витебской и Гомельской обл.), Латвийская, Литовская, Эстонская ССР, Карельская АССР, Архангельская, Калининградская, Ленинградская, Мурманская, Новгородская и Псковская области	197228. Ленинград, П-228, ул. Савушкина 61. Специнтернат при ЛГУ. ЗМШ, на конкурс.
Витебская область	210036. Витебск, 36, Московский просп. 33. Пединститут, кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Владимирская область	600024. Владимир, просп. Строителей 11. Пединститут, кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Вологодская область	162600. Вологодская обл., Череповец, ул. М. Горького 14. Пединститут, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Воронежская, Белгородская, Липецкая, Курская, Тамбовская области	394693. Воронеж, Университетская пл. 1. Университет. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Гомельская область	246000. Гомель, Советская ул. 108. Университет, мехмат, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Дагестанская АССР	367025. Махачкала, ГСП, Советская ул. 8. Дагестанский университет, мехмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Донецкая область	340055. Донецк, Университетская ул. 24. Университет, мехмат, кафедра высшей математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс. ИЛИ 343200. Донецкая обл., Славянск, ул. Ленина 12. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Ивановская область	153025. Иваново, 25, ул. Ермака 39. Университет, кабинет математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Казахская ССР (кроме Целиноградской, Тургайской, Кокчетавской и Джезказганской областей)	417007. Уральск, просп. Ленина 162. Пединститут, физмат, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Калининская область	170002. Калинин, Садовый пер. 35. Университет, матфак. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Кировская область	610013. Киров, 13, ул. Ленина 111. Пединститут. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Коми АССР	167001. Сыктывкар, Октябрьский просп. 55. Университет, мехмат. ЗМШ, на конкурс.
Краснодарский край	350751. Краснодар, ГСП, ул. К. Либкнехта 149. Кубанский университет, комн. 117. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Красноярский край — районы: Идринский, Краснотуранский, Курагинский, Минусинский, Каратузский, Ермаковский, Шушенский; Хакасская АО	662600. Абакан, просп. Ленина 90. Пединститут, физмат, кафедра высшей математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.

Продолжение табл.

Область, республика	Адрес
Красноярский край (остальные районы), Иркутская, Новосибирская, Тюменская области, Алтайский край	660075. Красноярск, 75, ул. Маерчака 6. Университет, матфак. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Куйбышевская область	443086. Куйбышев, ул. акад. Павлова 1. Университет, матфак, кафедра функционального анализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс
Магаданская область	685014. Магадан, Портовая ул. 13.增Пединститут, физмат, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Мордовская АССР	430000. Саранск, Большевистская ул. 68. Мордовский университет, матфак. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Орловская область	302015. Орел, Комсомольская ул. 95. Пединститут, кабинет математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Приморский край	690600. Владивосток, ГСП, ул. Суханова 8. Дальневосточный университет. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Ростовская область	344009. Ростов-на-Дону, ул. Горького 88. Университет, мехмат, кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Сахалинская область	693008. Южно-Сахалинск, просп. Ленина 290. Пединститут, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Свердловская область	620083. Свердловск, просп. Ленина 51. Уральский университет, мехмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Смоленская область	214000. Смоленск, ул. Пржевальского 4. Пединститут, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Таджикская ССР	734016. Душанбе, 16, просп. Ленина 17. Таджикский университет, мехмат, комн. 49. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Татарская АССР, Марийская АССР, Горьковская, Астраханская, Волгоградская области	420008. Казань, 8, ул. Ленина 18. Университет, мехмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Тернопольская область	282009. Тернополь, ул. Карпенко 10. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Томская область	634044. Томск, 44, Комсомольский просп. 75. Пединститут, комн. 254. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Удмуртская АССР	426037. Ижевск, Красногвардейская ул. 71. Удмуртский университет, кафедра алгебры и топологии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Ульяновская, Саратовская, Пензенская области	432700. Ульяновск, 2, пл. 100-летия со дня рождения Ленина, д. 2. Пединститут, кафедра алгебры и геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Целиноградская, Тургайская, Кокчетавская и Джезказганская области	473021. Целиноград, 21, ул. Циолковского 6. Пединститут, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Черновицкая область	274012. Черновцы, 12, ул. Коцюбинского 2. Университет, канцелярия. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Читинская область	672007. Чита, 7, ул. Бабушкина 129. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Чувашская АССР	428015. Чебоксары, Энергетическая ул. 4. Чувашский университет, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Остальная территория СССР	117234. Москва, В-234, МГУ. Всесоюзная заочная математическая школа, на конкурс.

Школьники, живущие в центральной зоне РСФСР, могут поступать как в соответствующие филиалы ВЗМШ, так и на малый мехмат (см. с 58)

VI Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов

С 9 по 16 июля 1978 года в Новосибирском академгородке проходил VI Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов. На слете, посвященном 60-летию ВЛКСМ, были подведены итоги деятельности коллективов юных техников всех областей, краев и автономных республик РСФСР за последние два года, прошедшие со времени V Всероссийского слета.

Участники привезли на слет около 700 экспонатов и техническую документацию к ним. Решением жюри 189 лучших экспонатов были допущены к защите на заседаниях пяти секций слета:

1. Юные техники — школе.
2. Юные рационализаторы и конструкторы — промышленности.
3. Юные рационализаторы и конструкторы — сельскому хозяйству.
4. Юные рационализаторы и конструкторы — строительству и транспорту.
5. Юные конструкторы — армии, авиации и флоту.

Все защиты обязательно сопровождались демонстрацией представленного технического устройства, показом чертежей, схем, таблиц, фотографий, диапозитивов. При оценке учитывались целесообразность и актуальность проделанной работы, рациональность пути решения технической задачи, а также умение выступать публично и отвечать на вопросы членов жюри и всех присутствующих. А вопросов было много: только ученики задали своим товарищам более 1500 вопросов.

Если на первых слетах юные техники представляли в основном модели-игрушки, модели-копии, то теперь многие их работы имеют непосредственное отношение к народному хозяйству нашей страны. Достаточно сказать, что на 100 технических устройств, представленных на слет, выданы удостоверения о рационализаторском предложении, а 48 из них уже внедрены и успешно работают.

Например, электронно-натяжное устройство для намотки провода, сконструированное учениками школы № 22 г. Воронежа Сергеем Боевым и Юрием Максимовым, используется на Воронежском заводе «Электроприбор». Силами Воронежской станции юных техников было изготовлено для завода 25 таких устройств.

Впервые на слет было представлено описание изобретения — нового способа выращивания помидоров. Один из авторов изобретения — ученик школы № 75 г. Владивостока Андрей Кудра.

Ученица школы № 32 г. Горького Елена Грушко предложила медицинскую банку, представляющую собой пластмассовый цилиндр с поршнем. Для этих банок не надо ни спирта, ни огня. Такие банки уже применяются в детском отделении городской больницы.

Ребята из Ижевской станции юных техников сконструировали электролобзик и пылеулавливающее устройство к нему. Эти приборы были созданы на основе тщательного анализа существующих аналогичных приборов и целой серии собственных моделей. Представленные на слет модели (их защищал ученик школы № 62 г. Ижевска Игорь Чехомов) рекомендованы к выпуску промышленными предприятиями для школ и различных технических кружков.

Юные радиолюбители Новосибирской областной станции юных техников создали целый ряд интересных электронных приборов для нужд сельского хозяйства. Так, разработанная ими «трость агронома» для определения влажности земли, зерна, воздуха и т. д. уже выпускается Новосибирским заводом радиодеталей.

По итогам слета 30 его участников награждены дипломами и памятными подарками журнала «Моделист-конструктор», 41 участник — авторскими свидетельствами и дипломами журнала «Юный техник» и 5 участников — дипломами журнала «Радио».

Самой представительной секцией слета была секция «Юные техники — школе». Ученики предложили большое число оригинальных приборов для школьных учебных кабинетов. Например, для кабинета физики разработаны следующие приборы, получившие одобрение членов жюри:

1. Четыре прибора по механике, с помощью которых можно демонстрировать относительность движения, принцип независимости движений, изучать законы равноускоренного движения. Свои проекты защищали ученики школы № 43 г. Шахты Татьяна Перевертайло, Сергей Шикунов, Юрий Мамчур и Ирина Иванова.

2. Универсальный прибор «Вращающийся диск на самодвижущейся тележке», позволяющий продемонстрировать более десятка интересных опытов по кинематике и динамике в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Прибор создан группой учеников школы № 62 г. Кемерово, защищал прибор Володя Цыганков.

3. Две «Дороги на воздушных подушках», так необходимые школам для демонстрации практически всех законов механи-

ки. Эти приборы, совершенно различные по техническому решению, изготовили ученики школы № 42 г. Люберцы (защищал Сергей Чеперигин) и школы № 118 г. Волгограда (защищал Игорь Науменко).

4. Комплект автоматов для кабинета физики сельской школы, созданный учениками Медновской санаторной школы-интерната Калининской области (защищал Михаил Пиккин).

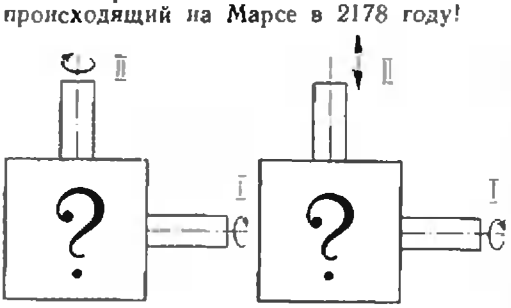
5. Комплект приборов по астрономии, созданный членами кружка при Новосибирском дворце пионеров (защищали Евгений Бакшанский и Александр Щетников).

6. Школьный телецентр, представленный юными конструкторами Новосибирской областной станции юных техников (защищал Юрий Малов).

Интересный «Универсальный прибор по стереометрии» для кабинета математики продемонстрировал ученик школы № 13 г. Владимира Андрей Чебуханов. С помощью этого прибора можно быстро собрать различные объемные фигуры и показать всевозможные сечения в них.

Заметим, что в целом уровень защит был довольно высоким. Однако некоторые докладчики, уверенно поясняя технические принципы устройства своих моделей, значительно слабее представляли себе физические явления и процессы, которые они моделировали.

Большой простор для фантазии был предоставлен участникам конкурса фантастических проектов, которым завершился слет. Бо́льшая часть проектов посвящалась космической теме, хотя были и земные проекты. Победителем конкурса стал Слава Хренин из г. Ульяновска. Он прокомментировал 106-й слет юных техников, происходящий на Марсе в 2178 году!



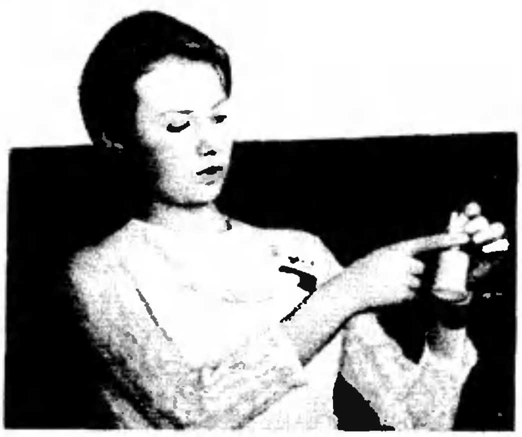
Придумайте возможные схемы «черного ящика», с помощью которых можно преобразовать движения:
а) вращательное движение горизонтального вала I во вращательное движение вертикального вала II;
б) вращательное движение горизонтального вала I в возвратно-поступательное движение вертикального вала II.

Все участники слета во время его работы выполняли «домашнее задание» — придумать как можно больше вариантов решения технической задачи, представленной на рисунке. Обладатель четырех медалей ВДНХ, ученик школы № 18 г. Ярославля Сергей Медовников пока является рекордсменом: он предложил 49 решений этой задачи. А сколько придумаете вы?

В. Орлов

Выступает Татьяна Бойчук (г. Ростов), получившая спецприз за лучшую защиту.

Александр Щетников (г. Новосибирск) демонстрирует комплект приборов по астрономии.



Елена Грушко (г. Горький) рассказывает о своей работе.

Во время защиты работ не было равнодушных.

Московский инженерно-физический институт
(*см. «Квант» № 1*)

Математика

Вариант 1

1. Обозначим необходимое количество пресной воды через x кг; тогда из условий задачи:

$$30\cdot\frac{5\%}{100\%}\cdot(x+30)^{-1}\cdot 100\% = p\%;$$

решая это уравнение, находим ответ: если $p \in]0;\ 5]$, то нужно добавить

$$30\left(\frac{5}{p}-1\right)\text{ кг}$$

пресной воды. В случае, когда $p \notin]0;\ 5]$, задача не имеет решения.

2. Так как боковые ребра пирамиды $SABCD$ (см. рисунок) составляют с плоскостью основания равные углы, то ортогональная проекция O_1 вершины пирамиды S на плоскость основания $(ABCD)$ есть центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$.

Сечение описанной сферы плоскостью основания пирамиды $(ABCD)$ есть окружность, описанная около прямоугольника $ABCD$. Следовательно, центр O описанной сферы принадлежит прямой (SO_1).

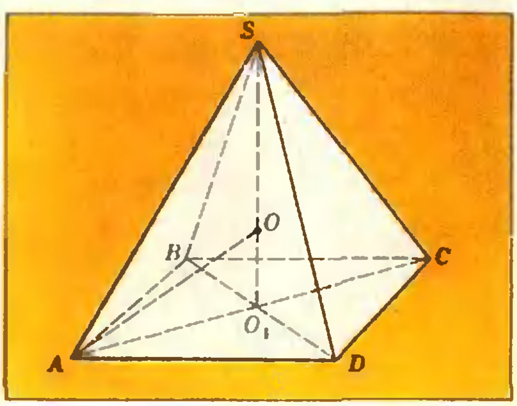
Треугольник ASC равнобедренный, так как $\widehat{SAC}=\widehat{SCA}$. Сторона основания $[AC]$ этого треугольника является в то же время диагональю прямоугольника $ABCD$, поэтому

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2+|BC|^2} = 5. \qquad (1)$$

Так как центр сферы, описанной около пирамиды, принадлежит плоскости (ASC), то радиус окружности, описанной около треугольника ASC, равен $R=6{,}5$.

Из прямоугольного треугольника AOO_1 имеем

$$(|SO_1|-R)^2 = R^2-\left|\frac{|AC|}{2}\right|^2, \qquad (2)$$



откуда

$$|SO_1| = R\pm\sqrt{R^2-\left|\frac{|AC|}{2}\right|^2} = 6{,}5\pm 6. \quad (3)$$

а) Центр описанной сферы O принадлежит пирамиде $SABC$. При этом в формуле (3) следует выбрать знак плюс. Длина бокового ребра определяется из прямоугольного треугольника ASO_1:

$$|AS| = \sqrt{|SO_1|^2+R^2} = \sqrt{212{,}5}.$$

Из треугольника BSC, по теореме косинусов, находим

$$\cos(\widehat{BSC}) = \frac{|BS|^2+|CS|^2-|BC|^2}{2|BS|\cdot|CS|} = \frac{309}{325},$$

$$\widehat{BSC} = \arccos\frac{309}{325}.$$

б) Центр описанной сферы точки O не принадлежит пирамиде $SABC$. В формуле (3) следует выбрать знак минус. Вычисления, аналогичные предыдущему случаю, дают

$$\widehat{BSC} = \pi-\arccos\left(-\frac{3}{13}\right) = \arccos\frac{3}{13}.$$

Ответ. $\left\{\arccos\frac{309}{325};\ \arccos\left(\frac{3}{13}\right)\right\}$.

3. Определим значение неизвестного параметра a, входящего в уравнение параболы, из условия

$$(4x^2+ax+2)'\,|_{x=-5} = \operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arctg} 20).$$

Выполнив действия, указанные в левой части равенства и упростив правую часть по формулам приведения, получим $40-a=20$, откуда $a=20$.

Определим абсциссы точек пересечения параболы и прямой из уравнения

$$4x^2+20x+2 = -8x-46.$$

Получим

$$x_1=-4,\quad x_2=-3.$$

Площадь рассматриваемой фигуры определяется интегралом

$$\int_{-4}^{-3}[-8x-46-(4x^2+20x+2)]\,dx =$$

$$= -4\int_{-4}^{-3}(x^2+7x+12)\,dx = 2/3.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$ кв. ед.

4. Уравнение определено при всех действительных x, для которых $\cos 6x\neq 0$. Рассмотрим два случая:

а) $x\geqslant 0$; уравнение принимает вид

$$\sin 6x\cdot\cos 5x+\cos 6x\cdot\sin 5x = 0. \qquad (1)$$

Используя формулу синуса суммы, преобразуем (1) к виду

$$\sin 11x = 0 \quad \text{или} \quad x = \frac{n\pi}{11}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

б) Если $x<0$, то $|x| = -x$ и, учитывая нечетность функции тангенс, получим

$$\sin 6x \cdot \cos 5x - \cos 6x \cdot \sin 5x = 0,$$

откуда

$$x = k\pi, \quad -k \in \mathbf{N}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\cos\frac{6\pi n}{11} \neq 0, \ n \in \mathbf{Z} \ \text{и} \ \cos 6\pi k \neq 0, \ -k \in \mathbf{N}.$$

Ответ $\left\{\frac{n\pi}{11} \mid n \in \mathbf{Z};\ k\pi \mid -k \in N\right\}$.

Вариант 2

1. 164850.

2. При $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \neq \beta$ два решения: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{V}{\sin|\alpha-\beta|}$; при $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha = \beta$, одно решение: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$;

здесь

$$V = \frac{4a^3}{75}\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

3. $\{(15; -12)\}$.

4. $\left\{-6\pi; -\frac{9\pi}{2}; 0\right\}$.

Вариант 3

1. $\frac{tV \pm \sqrt{tV(tV-2000)}}{2t}$ при $tV \in [2000; \infty[$ (иначе решений нет).

2. Площадь сечения равна

$$\frac{a^2 \sin\psi \cdot \sin(\gamma \pm \psi)}{4\sqrt{3}\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2\alpha/2}$$

при $\gamma \in \left[\psi; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \in \left]0; \frac{2\pi}{3}\right[$;

$$\frac{a^2 \sin\psi \cdot \sin(\gamma - \psi)}{4\sqrt{3}\ \sin^2\gamma \sin^2\alpha/2}$$

при $\gamma \in]\psi; \varphi[$, $\alpha \in \left]0; \frac{2\pi}{3}\right[$;

0 в остальных случаях; здесь $\varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha/2}{\sqrt{3}}\right)$

$\psi = \arccos\left(\frac{2\sin\alpha/2}{\sqrt{3}}\right)$.

3. $(9 - 8\ln 2)$ кв. ед.

4. $\left\{\arcsin\frac{1}{14} + 2n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$.

Физика

1. $|\vec{v}_{\min}| = \sqrt{\frac{Mgl}{m+M}} \approx 1{,}4$ м/с.

2. $|\vec{F}_д| = \left(\frac{n}{k} - 1\right)\left(p_0S + Mg\right) = 15$ Н.

3. $A = \frac{q(q_1 - q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -6\cdot10^{-6}$ Дж.

4. $|\vec{B}| = \frac{\mathscr{E}\tau}{NS} = 1{,}5$ Т;

$Q = \frac{\mathscr{E}^2\tau}{RN^2} = 1{,}6\cdot10^{-6}$ Дж.

5. $x \approx 2F(n-1)\alpha = 1$ см.

Как быть?

(см. с. 22)

Поскольку функция $F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$ является первообразной для функции f, любая другая первообразная для f — в частности, $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x$, имеет вид $F_1(x) + C$. Для F_2 константа C находится из равенства $-\frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$. Подставляя, например, $x = 0$, получаем $C = -\frac{1}{2}$. Итак, $F_2(x) = F_1(x) - \frac{1}{2}$.

Разумеется, верно также, что любая первообразная для f имеет вид $F_2(x) + C$. В частности, $F_1(x) = F_2(x) + \frac{1}{2}$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, В. Чернов

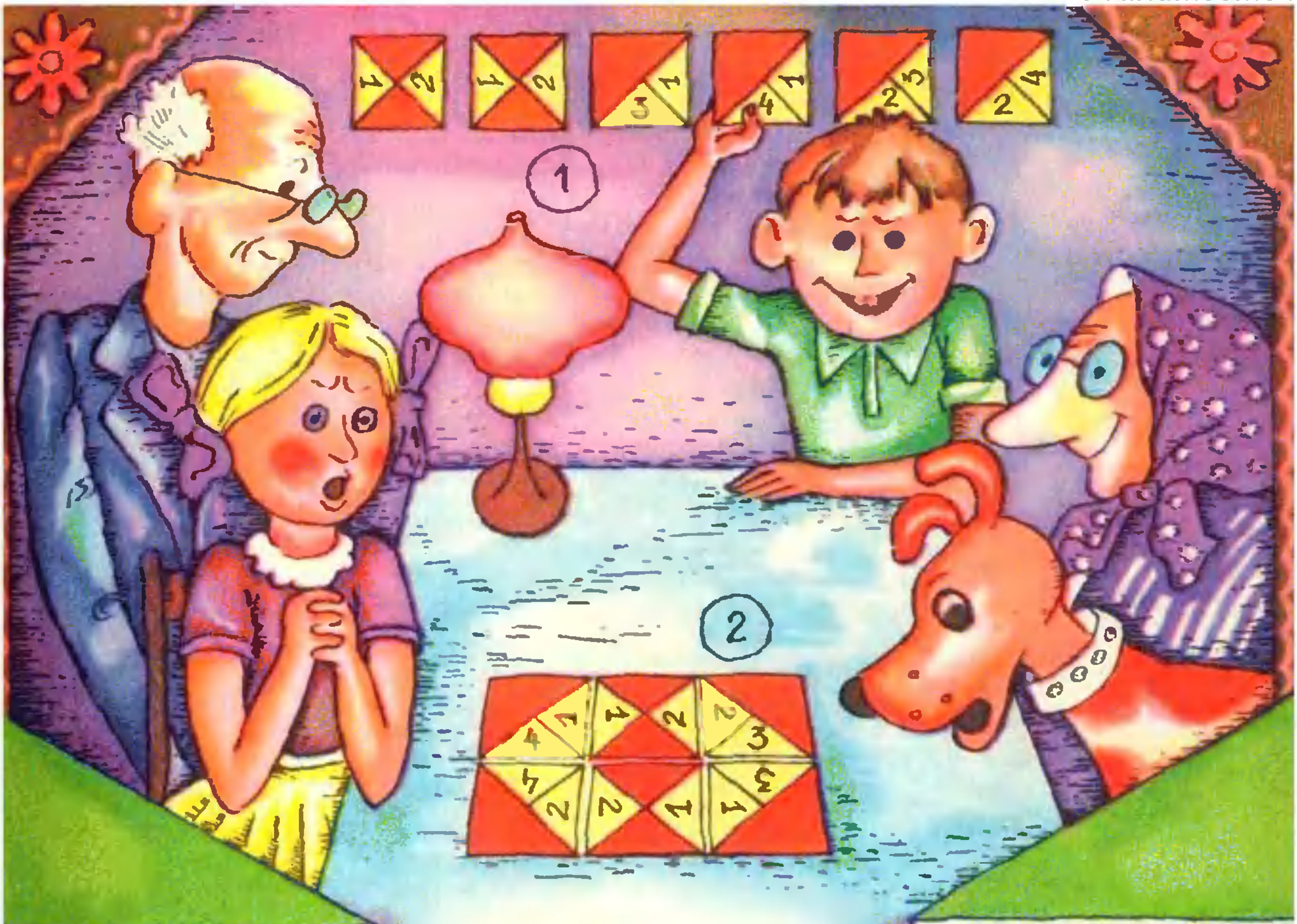
Зав. редакцией Л. Чернова

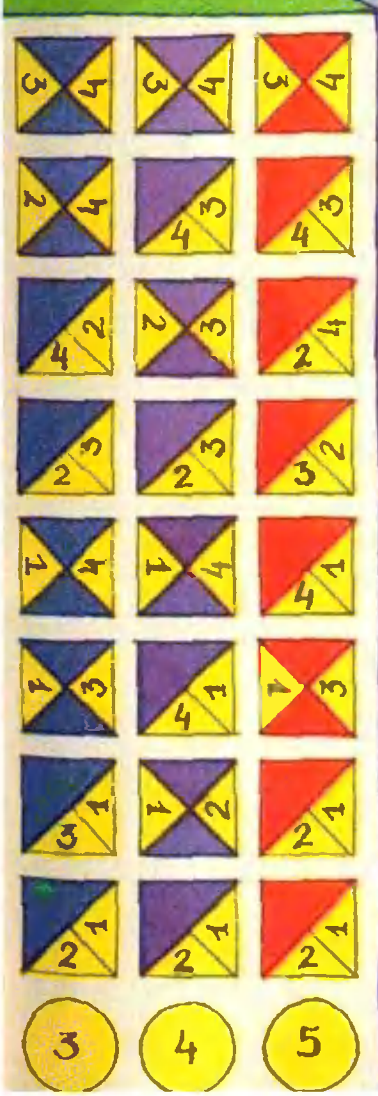
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/XI-78
Подписано в печать 12/I-79
Бумага 70×108 1/16. Физ.печ.л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,15 Т-01855
Цена 30 коп. Заказ 2789 Тираж 285 459 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области



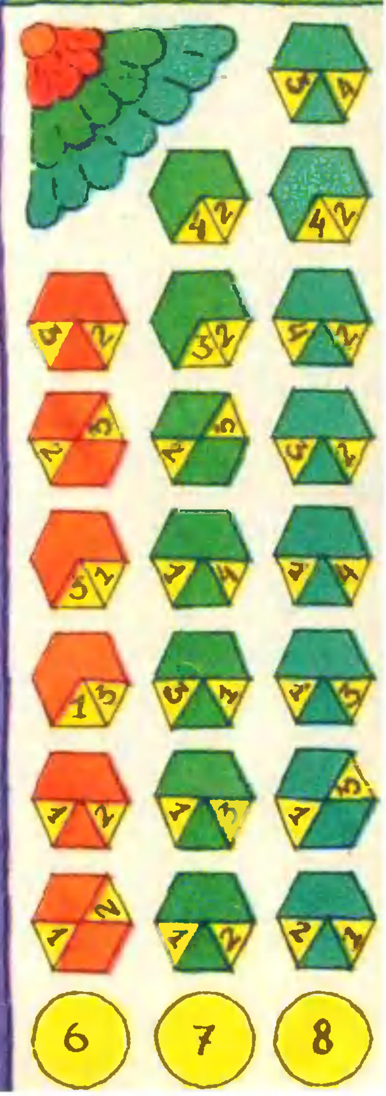


Квадраты и шестиугольники

Каждый квадрат разделен на четыре части, каждый шестиугольник — на шесть. В двух частях (и у квадратов, и у шестиугольников) размещены две цифры: 1, 2, 3 или 4 (различные!). Оставшиеся части пусты (эти части на рисунках закрашены). В каждой задаче требуется использовать все фигурки данного набора. При этом фигурки должны быть уложены по «доминошным» правилам: граничащие по стороне фигурки должны соприкасаться либо частями с одинаковыми цифрами, либо закрашенными частями. Кроме того, нужно, чтобы не было «висячих» частей с цифрами (т. е. не соединенных с другими). Например, набор из шести квадратов, изображенный на рисунке 1, сложен по правилам на рисунке 2.

Попробуйте найти правильные расположения для наборов, приведенных на рисунках 3—8. Первая задача — довольно простая, вторая и третья немного сложнее. Задачи с шестиугольниками — гораздо сложнее, поэтому не отчаивайтесь, если вам не сразу удастся это сделать.

С. Недвига



Цена 30 коп.
Индекс 70465

На этом рисунке показана модель многогранника, сделанная из листа бумаги одними изгибаниями, без разрезов и склеек. В правом верхнем углу показана схема изгибаний для куска поверхности: пунктир обозначает линии изгиба в одну сторону, сплошные линии — в другую.
Модель изготовил А. Волков.